

## Feuille d'exercices 9 : Les complexes.

**Exercice 9.1 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^2 - (5 - 14i)z - (24 + 10i) = 0$ .

**Exercice 9.2 :** (niveau 1)

Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $x \mapsto xe^{-x}$ .

**Exercice 9.3 :** (niveau 1)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . Déterminer le module et un argument de

$$(1 + \cos \theta + i \sin \theta)^n, \text{ puis de } \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}.$$

**Exercice 9.4 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système d'équations suivant :  $\begin{cases} uv &= 1 - 8i \\ u^2 + v^2 &= -2 - 16i \end{cases}$ .

**Exercice 9.5 :** (niveau 1)

Démontrer que la fonction  $\tan$  est absolument croissante sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ , c'est-à-dire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ième de  $\tan$  est positive sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

**Exercice 9.6 :** (niveau 1)

Déterminer les caractéristiques géométriques de la similitude  $s$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $N$  d'affixe  $Z = 2(1 + i)z - 7 - 4i$ .

**Exercice 9.7 :** (niveau 1)

**1°)** Soient  $u, v \in \mathbb{C}^*$ . Démontrer la formule d'Al Kachi :

$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u|.|v|. \cos(\arg u - \arg v)$  et interpréter géométriquement ce résultat.

**2°)** Soient  $u, v \in \mathbb{C}$ . Démontrer l'identité du parallélogramme :

$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$  et interpréter géométriquement ce résultat.

**Exercice 9.8 :** (niveau 1)

Soit  $ABCD$  un carré ; on suppose que  $C$  et  $D$  ont des coordonnées entières ; montrer qu'il en est de même de  $A$  et  $B$ .

---

**Exercice 9.9 :** (niveau 1)

Dans le plan, on considère un cercle  $C$  de centre  $O$  et  $A, B, P$  trois points distincts de ce cercle. On souhaite démontrer que l'angle sous lequel  $O$  voit les points  $A$  et  $B$  est (modulo  $2\pi$ ) le double de l'angle sous lequel  $P$  voit les mêmes points  $A$  et  $B$ . C'est le théorème de l'angle au centre.

Pour cela, on choisit de munir le plan de sa structure complexe en choisissant  $O$  pour origine et le rayon du cercle pour unité de longueur. Les points  $A, B$  et  $P$  appartiennent alors au cercle unité, ce qui permet de noter  $e^{i\alpha}$ ,  $e^{i\beta}$  et  $e^{i\theta}$  leurs affixes respectives. L'angle sous lequel  $O$  voit les points  $A$  et  $B$  est l'angle  $\widehat{AOB}$  dont une mesure (modulo  $2\pi$ ) est notée  $\varphi$ . De façon similaire, l'angle géométrique sous lequel  $P$  voit les points  $A$  et  $B$  est l'angle  $\widehat{APB}$  dont une mesure est notée  $\psi$ .

Exprimer  $\varphi$  et  $\psi$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  et conclure.

**Exercice 9.10 :** (niveau 2)

Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{2k}$ .

**Exercice 9.11 :** (niveau 2)

Calculer les primitives de  $f(x) = \cos(\ln x)$  et de  $g(x) = \operatorname{sh} x \sin x$  selon deux méthodes : par intégration par parties et en utilisant les complexes.

**Exercice 9.12 :** (niveau 2)

Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos a \neq 0$ . Calculez  $C_n = \sum_{k=0}^n \frac{\cos(ka)}{(\cos a)^k}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sin(ka)}{(\cos a)^k}$ .

**Exercice 9.13 :** (niveau 2)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2. Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$ , où  $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$ .

**Exercice 9.14 :** (niveau 2)

Soient  $P$  un polynôme à coefficients réels, de degré impair, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^\infty$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$ . Montrer que  $f$  est identiquement nulle.

**Exercice 9.15 :** (niveau 2)

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f$  une application de classe  $C^{n+1}$  de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in [a, b]$ . Montrer que le reste de Taylor à l'ordre  $n$  de  $f$  en  $x_0$  est égal à  $\int_{x_0}^x \int_{x_0}^{t_{n+1}} \cdots \int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1) dt_1 dt_2 \cdots dt_{n+1}$ .

**Exercice 9.16 :** (niveau 2)

Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Calculer  $\int_0^\pi \sin^{2m} t \times \cos(2mt) dt$ .

---

**Exercice 9.17 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme de degré  $n$ , tel que  $P(0) = 1$  et  $P(1) = 0$ .  
On note, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$ .

**1°)** Montrer que  $\sum_{k=0}^n P(\omega_k) = n + 1$ .

**2°)** En déduire que  $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$ .

**Exercice 9.18 :** (niveau 2)

Déterminer les affixes  $z \in \mathbb{C}$  des points du plan usuel tels que les points d'affixes  $z$  et les racines cubiques de  $z$  forment un parallélogramme.

**Exercice 9.19 :** (niveau 2)

**1°)** Dans le plan complexe, interpréter géométriquement la transformation  $z \mapsto iz$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ .

**2°)** Soient  $z_1, z_2$  et  $z_3$  trois complexes de module 1. On note  $T$  le triangle de sommets les points  $M_i$ , d'affixe  $z_i$ , pour  $i = 1, 2, 3$ .

On note  $G$  le centre de gravité de  $T$  et  $H$  l'orthocentre de  $T$ .

a) Déterminer l'affixe de  $G$ .

b) On pose  $z_0 = z_1 + z_2 + z_3$ . Montrer que  $z_0$  est l'affixe de  $H$ .

**3°)** Pour un triangle  $ABC$ , donner une relation liant le centre de gravité  $G$ , l'orthocentre  $H$  et le centre  $I$  du cercle circonscrit.

**Exercice 9.20 :** (niveau 2)

Posons  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ . On se place dans un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct noté  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan d'affixes  $a, b$  et  $c$ .

Montrer que  $ABC$  est un triangle équilatéral direct (i.e :  $AB = AC = BC$  et  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$  est une base directe) si et seulement si  $a + bj + cj^2 = 0$ .

**Exercice 9.21 :** (niveau 2)**Théorème de Pappus.**

**1°)** Soit  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\mathbb{U}$ . On note  $A, B$ , et  $E$  les points d'affixe  $a, b$  et 1. On note  $P$  le projeté orthogonal de  $E$  sur la droite  $(AB)$  et  $p$  son affixe.

Montrer que  $1 - p = \frac{(1 - a)(1 - b)}{2}$ .

**2°)** En déduire le théorème de Pappus : Étant donné un quadrilatère  $ABCD$  inscriptible dans un cercle  $C$ , pour tout point  $M$  du cercle  $C$ , le produit de la distance de  $M$  à deux côtés opposés, ou aux deux diagonales est le même, pour chacun des choix des deux paires de côtés opposés.

---

**Exercice 9.22 :** (niveau 3)

Soient  $A, B, C, D$  quatre points du plan. On considère les points  $E, F, G, H$  tels que les triangles  $ABE, BCF, CDG, DAH$  soient rectangles isocèles directs en  $E, F, G, H$ . Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{FH}$  sont orthogonaux et de même norme.

**Exercice 9.23 :** (niveau 3)

Soient  $n \geq 3$  et  $I_1, I_2, \dots, I_n$  des points distincts du plan. On s'intéresse à l'assertion  $A_n$  : " il existe un  $n$ -uplet  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  de points du plan tels que  $I_1$  est le milieu de  $[M_1, M_2]$ ,  $I_2$  est le milieu de  $[M_2, M_3]$ , ...,  $I_{n-1}$  est le milieu de  $[M_{n-1}, M_n]$  et  $I_n$  est le milieu de  $[M_n, M_1]$ ".

1°) Démontrer que si  $A_4$  est vraie alors  $I_1I_2I_3I_4$  est un parallélogramme.

2°) a) Soient  $r_{a,\alpha}$  la rotation de centre  $a \in \mathbb{C}$  et d'angle  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $r_{b,\beta}$  la rotation de centre  $b \in \mathbb{C}$  et d'angle  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Si  $\alpha + \beta \equiv 0 [2\pi]$ , montrer que  $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$  est une translation. Sinon, montrer que  $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$  est une rotation d'angle  $\alpha + \beta$ .

b) Déterminer, en fonction de  $n$ , le nombre de solutions  $(M_1, M_2, \dots, M_n)$  du problème  $A_n$  et indiquer comment on peut les construire.

---

## Exercices supplémentaires, non corrigés en cours :

**Exercice 9.24 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$ .

**Exercice 9.25 :** (niveau 1)

Déterminer les complexes  $z$  tels que  $2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$ .

**Exercice 9.26 :** (niveau 1)

1°) Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de  $-18i$ ,  $1 - i$  et  $-\sqrt{3} + i$ .

2°) Calculer sous forme cartésienne les racines carrées de  $3 - 4i$  et  $-5 - 12i$ .

**Exercice 9.27 :** (niveau 1)

1°) Mettre sous forme exponentielle  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 1 - i$ ,  $z_3 = \sqrt{3} + i$  et  $z_4 = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ .

2°) Calculer  $Z_1 = (z_1)^{2018}$  et  $Z_4 = (z_4)^{20}$ .

3°) Déterminer les entiers naturels  $n$  tels que  $\omega_n = (z_3)^n$  soit un nombre réel.

**Exercice 9.28 :** (niveau 1)

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  le système d'équations suivant :  $\begin{cases} ab &= -24 - 10i \\ a + b &= 5 - 14i \end{cases}$ .

**Exercice 9.29 :** (niveau 1)

Soit  $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . Démontrer que l'application  $f_\omega : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$  définie par

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad f_\omega(z) = \frac{z + \omega}{\bar{\omega}z + 1}$$

est une bijection dont on précisera la bijection réciproque.

**Exercice 9.30 :** (niveau 1)

On fixe  $n \in \mathbb{N}$ . Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^n = \bar{z}$ .

**Exercice 9.31 :** (niveau 1)

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . En utilisant deux méthodes différentes, calculer les primitives de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ .

**Exercice 9.32 :** (niveau 2)

Déterminer  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $az + b = (cz + d)\bar{z}$ .

**Exercice 9.33 :** (niveau 2)

1°) Soit  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Montrer que

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}(|z + z'|^2 + |z - z'|^2).$$

2°) En déduire que, pour tout  $z, z', u \in \mathbb{C}^3$  tels que  $u^2 = zz'$ ,

$$|z| + |z'| = \left| \frac{z + z'}{2} + u \right| + \left| \frac{z + z'}{2} - u \right|.$$

---

**Exercice 9.34 :** (niveau 2)

Soit  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ . On pose  $Z = \frac{z + |z|}{\sqrt{z + \bar{z} + 2|z|}}$ .

Montrer que  $Z$  est défini et que  $Z^2 = z$ .

**Exercice 9.35 :** (niveau 2)

Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

**Exercice 9.36 :** (niveau 2)

Soit  $a, b, c \in \mathbb{U}$  tels que  $a + b + c = 1$ . Montrer que  $a = 1$  ou  $b = 1$  ou  $c = 1$ .

**Exercice 9.37 :** (niveau 2)

Soit  $n$  un entier naturel supérieur à 2. Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|$ , où  $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$ .

**Exercice 9.38 :** (niveau 2)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Montrer que  $|a + b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$ .

Quand a-t-on égalité ?

**Exercice 9.39 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $\frac{\left| \sum_{k=1}^n z_k \right|}{1 + \left| \sum_{k=1}^n z_k \right|} \leq \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{1 + |z_k|}$ .

**Exercice 9.40 :** (niveau 2)

Soit  $ABC$  un triangle direct. Soit  $D$  le centre d'un carré de côté  $AB$ , de sorte que  $D$  et  $C$  soient du même côté de la droite  $(AB)$  et soit  $E$  le centre d'un carré de côté  $BC$ , de sorte que  $E$  et  $A$  ne soient pas du même côté de la droite  $(BC)$ .

Déterminer l'angle formé entre la droite  $(AC)$  et la droite  $(DE)$ .

**Exercice 9.41 :** (niveau 2)

On pose  $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Im}(z) > 0\}$ , et  $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ .

On note  $f$  l'application définie pour tout  $z \neq -i$  par  $f(z) = \frac{z - i}{z + i}$ .

**1°)** Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $P$  sur  $D$ .

**2°)** Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tels que  $ad - bc = 1$ . On considère l'application  $h$  définie dans  $\mathbb{C}$  par  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

a) Montrer que pour tout  $z$  du domaine de définition  $\mathcal{D}_h$  de  $h$ ,  $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$ .

b) En déduire que  $h$  est une bijection de  $P$  sur  $P$ .

---

**Exercice 9.42 :** (niveau 2)

Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 3$  et  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{U}^3$  tel que  $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = 1$  et  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ .  
Montrer que  $n$  est un multiple de 3.

**Exercice 9.43 :** (niveau 2)

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral du plan. On note  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  les rotations de centre  $A$ ,  $B$  et  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Exprimer  $R_3 \circ R_2 \circ R_1$ .

**Exercice 9.44 :** (niveau 3)

Soit  $ABC$  un triangle direct. On coupe chaque côté en trois parts égales, et on construit sur le tiers du milieu un triangle équilatéral extérieur au triangle  $ABC$ , de sommets respectifs  $D$ ,  $E$  et  $F$  ( $D$  est construit à partir du segment  $[A, B]$ ,  $E$  à partir de  $[B, C]$  et  $F$  à partir de  $[A, C]$ ).

Montrer que les deux triangles  $ABC$  et  $DEF$  ont le même centre de gravité.

Montrer que  $DEF$  est équilatéral.

**Exercice 9.45 :** (niveau 3)

**1°)** On considère trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  du plan complexe, dont les affixes sont notés  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Montrer que  $ABC$  est équilatéral si et seulement si  $\frac{b-a}{c-a} = \frac{c-b}{a-b}$ .

Montrer que c'est équivalent à la condition  $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ .

**2°)** On considère un triangle  $ABC$  ainsi qu'un entier  $n$  supérieur ou égal à 3. Le segment  $[B, C]$  est une arête d'un  $n$ -gone régulier, situé dans l'extérieur du triangle, dont le centre est noté  $A'$ . De même les segments  $[A, C]$  et  $[A, B]$  permettent de définir les points  $B'$  et  $C'$ , en tant que centres de  $n$ -gones réguliers, situés à l'extérieur du triangle, dont l'une des arêtes est  $[A, C]$  (resp :  $[A, B]$ ).

À quelle condition sur  $n$  le triangle  $A'B'C'$  est-il équilatéral ?

**Exercice 9.46 :** (niveau 3)

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n |\cos k| \geq \frac{n}{4}$ .

**Exercice 9.47 :** (niveau 3)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  et  $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k^2)}$ . Calculer  $|Z|^2$ .