

DM 18 : ensembles équipotents

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni jeudi 27 novembre.

Lorsque E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Si E et F sont des ensembles, on note F^E l'ensemble des applications de E dans F .

$\mathcal{E}$ désigne un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles.

On suppose que $\mathcal{E}$ contient tous les ensembles usuels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Lorsque $E, F \in \mathcal{E}$, on suppose que $\mathcal{P}(E)$ et F^E sont des éléments de $\mathcal{E}$.

Plus généralement, on considère que $\mathcal{E}$ admet parmi ses éléments tous les ensembles considérés dans la suite de ce problème, même lorsque ce n'est pas explicitement signalé.

Partie I : Équipotence

Lorsque F et G sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dit que F et G sont équipotents si et seulement si il existe une bijection de F dans G .

1°) Montrer que la relation "être équipotent" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}$.

Pour la suite, cette relation sera appelée la relation d'équipotence. Lorsque $E \in \mathcal{E}$, la classe d'équivalence de E pour la relation d'équipotence sera appelée la classe d'équipotence de E .

2°) Soit $E \in \mathcal{E}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Lorsque E est de cardinal n , quelle est la classe d'équipotence de E ?

Lorsque E est une partie de $\mathbb{N}$, quelle est la classe d'équipotence de E ?

3°) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_N$ est équipotent à l'ensemble des applications croissantes de $\mathbb{N}_n$ dans $\mathbb{N}_p$.

4°) On note α l'application de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

pour tout $x \in]0, 1[$, $\alpha(x) = \frac{2x - 1}{4x(1 - x)}$.

En utilisant α , montrer que $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

5°) Montrer que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ sont équipotents.

- 6°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $2n$ éléments de $\mathcal{E}$, notés $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots, F_n$.
On suppose que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, E_i est équipotent à F_i .
Montrer que $E_1 \times \dots \times E_n$ est équipotent à $F_1 \times \dots \times F_n$.
- 7°) On suppose que A, B, E et F sont quatre éléments de $\mathcal{E}$.
On suppose que A et E sont équipotents. On suppose que B et F sont équipotents.
Montrer que B^A et F^E sont équipotents.
- 8°) Soit A, B et C trois éléments de $\mathcal{E}$.
Montrer que $(A^B)^C$ est équipotent à $A^{B \times C}$.
- 9°) Soit I un ensemble. Montrer que I et $\mathcal{P}(I)$ ne sont pas équipotents.
- 10°) Soit I un ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(I)$ est équipotent à $\{0, 1\}^I$.

Partie II : Subpotence

Lorsque F et G sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on dit que F est subpotent à G si et seulement si il existe une injection de F dans G .

- 11°) Montrer que $\mathbb{N}$ est subpotent à tout ensemble infini E tel que $E \in \mathcal{E}$.
- 12°) Soit $F, G \in \mathcal{E}$ avec $F \neq \emptyset$. Montrer que F est subpotent à G si et seulement si il existe une surjection de G dans F .

On admet le théorème de Cantor-Bernstein selon lequel, pour tout $E, F \in \mathcal{E}$, E et F sont équipotents si et seulement si E est subpotent à F et F est subpotent à E .

- 13°) Lorsque $E \in \mathcal{E}$, on note $\overline{E}$ la classe d'équipotence de E .
Si $E, F \in \mathcal{E}$, on convient que $\overline{E} \leq \overline{F}$ si et seulement si E est subpotent à F .
Démontrer que " $\leq$ " est une relation d'ordre sur l'ensemble des classes d'équipotence de $\mathcal{E}$.

- 14°) Soit $E \in \mathcal{E}$. On suppose que E est infini.
Soit $x \in E$. On suppose que $E \setminus \{x\} \in \mathcal{E}$.
Montrer que E et $E \setminus \{x\}$ sont équipotents.

- 15°) Soit E un ensemble (élément de $\mathcal{E}$). On suppose qu'il existe une partie F de E telle que F est dénombrable et $E \setminus F$ est infini.
Montrer que E et $E \setminus F$ sont équipotents.

- 16°) En utilisant la notion de développement d'un réel en base a (où a est un entier tel que $a \geq 2$), montrer que $]0, 1[$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.
En déduire que $]0, 1[^2$ est équipotent à $]0, 1[$.

- 17°) En déduire que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (sans utiliser la partie III).

- 18°) On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (*Indication* : on pourra penser à restreindre les éléments de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{Q}$).

Partie III : Equipotence entre E et E^2

Dans cette partie, E désigne un élément de $\mathcal{E}$ tel que E est équipotent à E^2 .

19°) Que peut-on dire de E s'il est fini ?

Pour toute la suite, on suppose que E est infini.

20°) Montrer que E^E est subpotent à $\mathcal{P}(E^2)$.

21°) Soit $A, B \in \mathcal{E}$. On suppose que A est subpotent à B . Montrer que $\mathcal{P}(A)$ est subpotent à $\mathcal{P}(B)$. En déduire que $\mathcal{P}(E^2)$ est subpotent à $\mathcal{P}(E)$.

22°) Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est subpotent à E^E .

23°) En déduire que E^E et $\mathcal{P}(E)$ sont équipotents.