DM 19 : Formule d'inversion de Rota

Lorsque A est un ensemble fini, on notera $|A|$ son cardinal.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.

Partie I : Démonstration de la formule de Rota

Soit $N \in \mathbb{N}$. On suppose que E est un ensemble fini de cardinal N, muni d'une relation d'ordre notée "$\leq$" éventuellement partielle.
Lorsque $x, y \in E$, on convient que $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$.

1°) Montrer que la relation binaire "$<$" est transitive.

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x, y \in E$. Lorsque $(x_i)_{0 \leq i \leq p} \in E^{p+1}$, on dit que $(x_i)_{0 \leq i \leq p}$ est une chaîne de E de longueur p joignant x à y si et seulement si $x_0 = x$, $x_p = y$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $x_i < x_{i+1}$.
On note $C_p(x, y)$ l'ensemble des chaînes de longueur p joignant x à y et $c_p(x, y)$ le cardinal de $C_p(x, y)$.

2°) Soit $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 1$. Montrer que $c_p(x, x) = 0$ et que $c_0(x, x) = 1$.

3°) Soit $x, y \in E$ et $p \in \mathbb{N}$.
Calculer $c_p(x, y)$ lorsque $\neg(x < y)$ (on rappelle que "$\neg$" désigne le connecteur logique de négation).
Calculer $c_1(x, y)$ dans tous les cas.

4°) Soit $x, y \in E$ tels que $x \leq y$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
Construire une bijection de $C_{p+1}(x, y)$ dans $\displaystyle\bigcup_{\substack{z \in E \text{ tel que} \\ x \leq z < y}} C_p(x, z)$.

Montrer que $c_{p+1}(x, y) = \displaystyle\sum_{x \leq z < y} c_p(x, z)$ et que $c_{p+1}(x, y) = \displaystyle\sum_{x < z \leq y} c_p(z, y)$.

5°) Soit $x, y \in E$. On rappelle que $N = |E|$.
Montrer que pour tout $p \geq N$, $c_p(x, y) = 0$.

Pour tout $x, y \in E$, on pose $\mu(x, y) = \displaystyle\sum_{p=0}^{N-1} (-1)^p c_p(x, y)$. Ainsi, μ est une application de E^2 dans $\mathbb{Z}$, que l'on appelle la fonction de Möbius associée au couple $(E, \leq)$.

6°) Pour tout $x \in E$, calculer $\mu(x,x)$.
Pour tout $x, y \in E$ avec $x < y$, montrer que $\displaystyle\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = 0 = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(z,y)$.

7°) Soit f une application de E dans $\mathbb{C}$.
Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \displaystyle\sum_{y \in E \text{ tel que } y \leq x} f(y)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{y \leq x} \mu(y,x) g(y)$.
Pour tout $x \in E$, on pose $h(x) = \displaystyle\sum_{x \leq y} f(y)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{x \leq y} \mu(x,y) h(y)$.
Il s'agit des formules d'inversion de Rota.

Partie II : Applications

8°) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour cette question seulement, on pose $E = \mathbb{N}_n$. On munit E de la relation d'ordre usuelle entre entiers et on utilise les définitions et les notations de la première partie.

8.a : Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$ tels que $j > i+1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \leq j - i$.
Montrer que $c_p(i,j)$ est égal au coefficient binomial $\displaystyle\binom{j-i-1}{p-1}$.

8.b : Montrer que la fonction de Möbius sur E est définie par :
pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\mu(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ -1 \text{ si } j = i+1 \\ 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$.
Que devient dans ce cas la formule de Rota ?

9°) Soit S un ensemble fini. Pour cette question, on suppose que E est l'ensemble des parties de S, que l'on ordonne par la relation d'inclusion.

9.a : Soit $A, B \in E$ avec $A \subset B$. Montrer que $\mu(A,B) = (-1)^{|B|-|A|}$. *Indication :* On pourra raisonner par récurrence sur $k = |B| - |A|$ en utilisant la question 6.
Que devient la formule de Rota dans ce cas ?

9.b : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$.

Déduire de la question 9.a que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_k$.

Il s'agit de la formule d'inversion de Pascal.

10°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette question que $E = \{0,1\}^m$.
Lorsque $u = (u_1, \dots, u_m) \in E$, on note $supp(u) = \{i \in \mathbb{N}_m \ / \ u_i = 1\}$.
Lorsque $u, v \in E$, on convient que $u \leq v$ si et seulement si $supp(u) \subset supp(v)$.
Montrer que $\leq$ est bien une relation d'ordre sur E.
Que devient la formule de Rota dans ce cas ?

11°) Lorsque $x, y \in \{0,1\}$, on note $x \oplus y$ le reste de la division euclidienne de $x + y$ par 2. Ainsi, $\oplus$ est une loi interne sur $\{0,1\}$. En interprétant 0 et 1 comme les valeurs booléennes "faux" et "vrai", à quel opérateur logique correspond cette loi interne ?
Soit f une application de $\{0,1\}^m$ dans $\{0,1\}$: c'est une application qui prend la valeur vraie ou fausse en fonction de m booléens.
Avec les notations de la question précédente, Pour tout $u \in \{0,1\}^m = E$, on pose $g(u) = \bigoplus_{v \leq u} f(v)$. Montrer que, pour tout $u \in \{0,1\}^m$, $f(u) = \bigoplus_{v \leq u} g(v)$.

12°) Soit F un ensemble fini non vide. Soit $P_1, \dots, P_n$ n parties de F, où $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $S = \mathbb{N}_n$ et $E = \mathcal{P}(S)$. On convient que, lorsque $I = \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} P_i = F$.

Pour tout $I \in E$, on pose $f(I) = \left| \left(\bigcap_{i \in I} P_i \right) \bigcap \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_n \setminus I} (F \setminus P_i) \right) \right|$ et $g(I) = \left| \left(\bigcap_{i \in I} P_i \right) \right|$.

Montrer que, pour tout $I \in E$, $g(I) = \sum_{I \subset J} f(J)$.

En déduire la formule du crible : $\left| \bigcup_{1 \leq i \leq n} P_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{J \subset \mathbb{N}_n \\ \text{tel que } |J| = k}} g(J)$.

Partie III : La fonction de Möbius arithmétique

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $E = \mathbb{N}_n$, que l'on ordonne avec la relation de divisibilité (on ne demande pas de montrer que c'est bien une relation d'ordre).
On emploie à nouveau dans ce cas les définitions et les notations de la première partie.

13°) Soit $r, s \in \mathbb{N}_n$ tels que r divise s.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, construire une bijection de $C_p(r, s)$ dans $C_p(1, \frac{s}{r})$.
En déduire que $\mu(r, s) = \mu(1, \frac{s}{r})$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}_n$, on pose $\mu(r) = \mu(1, r)$. μ est la fonction de Möbius arithmétique.

14°) Pour tout $r \in \mathbb{N}_n$, posons $m(r) = (-1)^k$ s'il existe k nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \dots, p_k$ tels que $r = \prod_{i=1}^{k} p_i$ (donc en particulier, $m(1) = 1$) et posons $m(r) = 0$ dans les autres cas.
Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}_n$, $\mu(r) = m(r)$. *Indication :* on pourra raisonner par récurrence forte sur r en utilisant la question 6.
Que devient la formule de Rota dans ce cadre ?

Lorsque $a, b \in \mathbb{N}_n$, on note $a \wedge b$ le pgcd de a et b.

15°) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}_n$, $\mu(r) = \displaystyle\sum_{\substack{d\in\{1,\ldots,r\} \\ \text{tel que } d\wedge r=1}} e^{2i\pi\frac{d}{r}}$.

16°) Soit $r \in \mathbb{N}_n$. Montrer que le nombre d'entiers k compris entre 1 et r tels que $k \wedge r = 1$ est égal à $\displaystyle\sum_{\substack{d\in\{1,\ldots,r\} \\ \text{tel que } d \text{ divise } r}} \mu(d)\frac{r}{d}$.