

DM 20

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le jeudi 4 décembre.

Exercice 1 : Une somme trigonométrique.

1°) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Sans utiliser de démonstration par récurrence, établir que
$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}.$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$

Exercice 2 : Une somme de produits.

1°) Soit $(a_j)_{j \geq 1}$ une suite de nombres réels.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \prod_{j=1}^k (1 - a_j).$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$

2°) Dédire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1.$

3°) Donner une seconde démonstration de cette dernière égalité en faisant intervenir une somme télescopique.

Exercice 3 : Proximal d'une famille de points du plan.

1°) Soient n un entier naturel non nul et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls. Démontrer que $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$ si et seulement si les z_i ont tous le même argument.

2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes non nuls dont les images dans le plan complexe sont notées $A_1, \dots, A_n$. On suppose que $A_1, \dots, A_n$ ne sont pas alignés.

On suppose de plus que $\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \dots + \frac{a_n}{|a_n|} = 0$.

Pour tout nombre complexe z , on pose $S = \frac{\overline{a_1}}{|a_1|}(a_1 - z) + \frac{\overline{a_2}}{|a_2|}(a_2 - z) + \dots + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}(a_n - z)$.

a) Vérifier que $S = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z :

$$(*) : |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \dots + |a_n - z|.$$

Traduire géométriquement cette inégalité (c'est-à-dire à l'aide des points $O, A_1, \dots, A_n$ et du point M d'affixe z) et interpréter.

c) Démontrer qu'il y a égalité dans l'inégalité $(*)$ si et seulement si z est nul.

Exercice 4.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de suites strictement monotones constituées de p nombres de l'ensemble d'entiers $\{1, \dots, n\}$?

Problème : Dénombrement par involution.

Principe d'involution.

1°) Soit E un ensemble fini. On suppose que E_+ et E_- sont deux parties disjointes de E dont la réunion est égale à E . Ainsi, $E_+ \cap E_- = \emptyset$ et $E = E_+ \sqcup E_-$.

Considérons $f : E \longrightarrow E$ une involution, c'est-à-dire une application telle que $f \circ f = \text{Id}_E$.

On note $F_f = \{x \in E / f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f . On suppose que tous les points fixes de f appartiennent à E_+ , c'est-à-dire $F_f \subset E_+$.

On suppose également que l'involution f est alternante, c'est-à-dire que :

$\forall x \in E_+ \setminus F_f, f(x) \in E_-$ et $\forall x \in E_-, f(x) \in E_+$.

Démontrer que $\text{card} F_f = \text{card} E_+ - \text{card} E_-$.

Chemins de Dyck.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que la notation $M(a, b)$ signifie que le point M est de coordonnées (a, b) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout entier naturel s , on appelle chemin de longueur s la donnée d'une liste $(M_0, \dots, M_s)$ de $s+1$ points à coordonnées entières tels que $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \in \{\vec{i}, \vec{j}\}$ pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$. On dit alors que les M_k sont les sommets du chemin joignant le point de départ M_0 au point d'arrivée M_s .

2°) Soient a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a \leq c$ et $b \leq d$. Dénombrer les chemins joignant les points de coordonnées (a, b) et (c, d) .

Pour tout entier naturel n , on appelle chemin de Dyck d'ordre n un chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$ de longueur $2n$ joignant les points $M_0(0, 0)$ et $M_{2n}(n, n)$ tel que tous les sommets ont une abscisse supérieure ou égale à l'ordonnée. Cela revient à dire que le chemin reste en dessous de la première diagonale du plan.

On veut déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre C_n de chemins de Dyck d'ordre n .

3°) Déterminer C_0, C_1, C_2 et C_3 . On fera des dessins.

On fixe $n \in \mathbb{N}$.

On note E_+ l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées $(1, 0)$ et $(n+1, n)$.

On note E_- l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées $(0, 1)$ et $(n+1, n)$.

On pose $E = E_+ \sqcup E_-$.

Pour tout point M de coordonnées (x, y) , on note $\widetilde{M}$ le point de coordonnées (y, x) .

On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ qui, à un chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$, associe

- le chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$ lorsque tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée ;
- le chemin de sommets $(\widetilde{M}_0, \dots, \widetilde{M}_k, M_{k+1}, \dots, M_{2n})$ avec k le premier indice d'un sommet où l'abscisse est égale à l'ordonnée, sinon.

4°) Vérifier que f est une involution alternante et préciser F_f .

5°) En déduire que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

3 : Formule du crible.

Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. On pose $U = A_1 \cup \dots \cup A_n$.

On définit les ensembles suivants :

- $E = \left\{ (x, I) \in U \times \mathcal{P}(\{1, \dots, n\}) \mid x \in \bigcap_{k \in I} A_k \right\}$;
- $E_+ = \{(x, I) \in E \mid \text{card}(I) \text{ pair}\}$;
- $E_- = \{(x, I) \in E \mid \text{card}(I) \text{ impair}\}$.

On convient que, lorsque $I = \emptyset$, $\bigcap_{k \in \emptyset} A_k = U$.

Pour tout élément x de U , on pose $m(x) = \max\{k \in \{1, \dots, n\} \mid x \in A_k\}$.

On considère l'application $f : E \longrightarrow E$ qui, à tout élément (x, I) de E , lui associe

$$f((x, I)) = \begin{cases} (x, I \cup \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \notin I \\ (x, I \setminus \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \in I \end{cases}$$

6°) Vérifier que f est une involution alternante et préciser F_f .

7°) En déduire la formule du crible.

4 : Bijection de Garcia-Milne.

Soient A et B deux ensembles finis.

On suppose que A_+ et A_- sont deux parties disjointes de A dont la réunion est égale à A et que B_+ et B_- sont deux parties disjointes de B dont la réunion est égale à B .

On considère $f : A \longrightarrow A$ et $g : B \longrightarrow B$ deux involutions alternantes telles que $F_f \subset A_+$ et $F_g \subset B_+$.

On suppose également l'existence d'une bijection $\varphi : A \longrightarrow B$ qui *conserve les signes*, c'est-à-dire $\forall x \in A_+$, $\varphi(x) \in B_+$ et $\forall x \in A_-$, $\varphi(x) \in B_-$.

8°) Démontrer que $\text{card} F_f = \text{card} F_g$.

9°) Démontrer que, pour tout élément x de F_f , il existe un entier naturel $\alpha(x)$ tel que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\alpha(x)}(x) \in F_g$. La *puissance désigne une itération pour la loi $\circ$* .

10°) Exhiber une bijection entre F_f et F_g .