# DM 20 : un corrigé

## Exercice 1 : Une somme trigonométrique.

**1°)** Linéarisons : $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\cos(2kx)}{2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx).$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\big(\cos(2kx) + i\sin(2kx)\big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{i2kx}\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{e}^{i2(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{i2x} - 1}\Big) && \text{(somme géométrique de raison } \mathrm{e}^{i2x} \neq 1 \text{, car } x \notin \pi\mathbb{Z}) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x}(\mathrm{e}^{i(n+1)x} - \mathrm{e}^{-i(n+1)x})}{\mathrm{e}^{ix}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})}\Big) && \text{(technique de l'angle moyen)} \\
&= \mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{inx}\,\frac{2i\sin\big((n+1)x\big)}{2i\sin(x)}\Big) && \text{(formules d'Euler)} \\
&= \mathrm{Re}\Big(\frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)}\,\mathrm{e}^{inx}\Big) \\
&= \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)}\cos(nx) \\
&= \frac{\sin\big((2n+1)x\big) + \sin(x)}{2\sin(x)} && \Big(\text{car } \sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{2\sin(x)}.
\end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{4\sin(x)},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{4\sin(x)}\cdot}$$

**2°)** Dans le résultat de la question précédente, posons

$$x = \frac{\pi}{2n+1},$$

ce qui est licite puisque, sous la condition $n \neq 0$, on a $0 < \pi/(2n+1) < \pi$, ce qui assure que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4\sin(x)} = \frac{2n+3}{4}\cdot$$

En conclusion,

$$\boxed{C_n = \frac{2n+3}{4}\cdot}$$

# Exercice 2 : Une somme de produits.

**1°)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : \quad P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1.$$

Initialisation : On a $P_0 = \prod_{j=1}^{0}(1 - a_j) = 1$ (convention pour un produit vide) et $\sum_{k=1}^{0} a_k P_{k-1} = 0$ (convention pour une somme vide), donc

$$P_0 + \sum_{k=1}^{0} a_k P_{k-1} = 1 + 0 = 1,$$

ce qui établit $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi. On a

$$\begin{aligned} P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} &= (1 - a_{n+1})P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} + a_{n+1}P_n \\ &= P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} \\ &= 1, \qquad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1.}$$

**2°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \geq 1$, on pose

$$a_j = \frac{j}{n}\cdot$$

On a

$$P_n = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\underbrace{\left(1 - \frac{n}{n}\right)}_{=0} = 0,$$

et, pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$, on a

$$P_k = \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^k}\prod_{j=1}^{k}(n-j) = \frac{k!}{n^k}\frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(n-j)}{k!} = \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k}.$$

Le résultat de la question 1 nous donne

$$0 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k-1} = 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1.}$$

**3°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$, en convenant que $\binom{n-1}{k} = 0$ lorsque $k = n$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k} - \binom{n-1}{k}\frac{k!}{n^k}\right]$.

De plus, d'après la formule comité-président, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$,

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k}=\sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1}\frac{(k-1)!}{n^{k-1}}-\binom{n-1}{k}\frac{k!}{n^k}\right]$ : c'est une somme télescopique,
donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k}=\binom{n-1}{0}\frac{0!}{n^0}-\binom{n-1}{n}\frac{n!}{n^n}=1$. On retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

# Exercice 3 : Proximal d'une famille de points du plan.

**1°)** On procède par double-implication.

$\Leftarrow$ Supposons que tous les $z_i$ ont le même argument.
Il existe $\theta\in\mathbb{R}$ et $r_1,\ldots,r_n\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall i\in[\![1;n]\!]$, $z_i=r_i\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Alors $|z_1+\cdots+z_n|=\left|(r_1+\cdots+r_n)\,\mathrm{e}^{i\theta}\right|=r_1+\cdots+r_n=|z_1|+\cdots+|z_n|$.

$\Rightarrow$ Pour la réciproque, on suppose que $|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|$.
Soit $i,j$ tels que $1\le i<j\le n$. Alors,

$$\begin{aligned}|z_1+\cdots+z_n| &= \Big|z_i+z_j+\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k\neq i)\wedge(k\neq j)}}z_k\Big|\\ &\le \Big|\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k\neq i)\wedge(k\neq j)}}z_k\Big|+|z_i+z_j|\\ &\le \Big|\sum_{\substack{1\le k\le n\\(k\neq i)\wedge(k\neq j)}}z_k\Big|+|z_i|+|z_j|\\ &\le |z_1|+\cdots+|z_n|=|z_1+\cdots+z_n|.\end{aligned}$$

Toutes ces quantités sont donc égales. Ainsi, $|z_i+z_j|=|z_i|+|z_j|$, donc d'après le cours, $\dfrac{z_i}{z_j}\in\mathbb{R}_+$ : $z_i$ et $z_j$ ont le même argument.

En définitive,

$\boxed{|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n| \text{ si, et seulement si, les } z_i \text{ ont tous le même argument.}}$

**2°)** **a)** Pour tout nombre complexe $z$, on a

$$\begin{aligned}S &= \left(\frac{\overline{a_1}a_1}{|a_1|}+\frac{\overline{a_2}a_2}{|a_2|}+\cdots+\frac{\overline{a_n}a_n}{|a_n|}\right)-\left(\frac{\overline{a_1}}{|a_1|}+\frac{\overline{a_2}}{|a_2|}+\cdots+\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}\right)z\\ &= \left(\frac{|a_1|^2}{|a_1|}+\frac{|a_2|^2}{|a_2|}+\cdots+\frac{|a_n|^2}{|a_n|}\right)-\underbrace{\overline{\left(\frac{a_1}{|a_1|}+\frac{a_2}{|a_2|}+\cdots+\frac{a_n}{|a_n|}\right)}}_{=0}z\\ &= |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,\end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\boxed{S=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.}$$

**b)** $\diamond$ Soit $z$ un nombre complexe.

La question précédente nous dit que $S$ est un nombre réel strictement positif. Il est donc égal à son module. Autrement dit, on a

$$|S| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Par ailleurs, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$|S| \leq \left|\frac{\overline{a_1}}{|a_1|}(a_1 - z)\right| + \left|\frac{\overline{a_2}}{|a_2|}(a_2 - z)\right| + \cdots + \left|\frac{\overline{a_n}}{|a_n|}(a_n - z)\right| \qquad (**)$$

c'est-à-dire, puisque $|\overline{a_k}| = |a_k|$,

$$|S| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z|.$$

En combinant ces résultats, on obtient

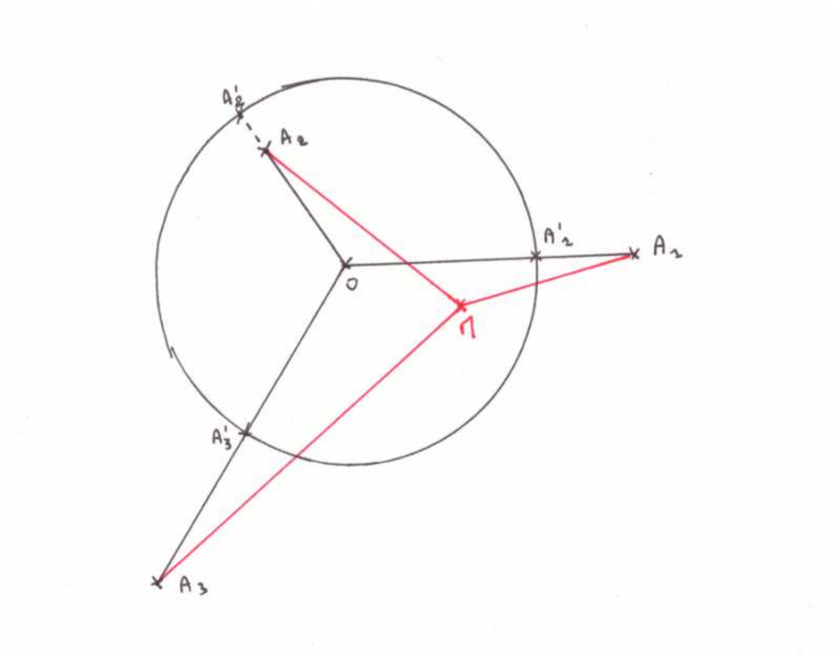
$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z|.$$

On a donc démontré que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z| \qquad (*).}$$

$\diamond$ Géométriquement, cela signifie que pour tout point $M$ du plan, on a $OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n \leq MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n$, autrement dit $O$ minimise la somme des distances aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

D'après l'énoncé, pour que $O$ vérifie cette propriété, il suffit que $\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|a_n|} = 0$. Traduisons géométriquement cette dernière condition : Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la demi-droite $[OA_i)$ rencontre le cercle $C$ de centre $O$ et de rayon 1 en le point $A'_i$ d'affixe $\frac{a_i}{|a_i|}$. L'isobarycentre des points $A'_1, \ldots, A'_n$ a pour affixe $\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|a_n|}$. Ainsi, lorsque $O$ est le centre de gravité des points $A'_1, \ldots, A'_n$, il minimise la somme des distances aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. La figure suivante illustre cette propriété, dans le cas où $n = 3$.




**c)** Supposons qu'il y a égalité dans $(*)$.

En reprenant le raisonnement de la question précédente, on voit que cela implique qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire $(**)$. D'après la question 1, cela signifie que tous les $\dfrac{\overline{a_k}}{|a_k|}(a_k - z)$ ont le même argument (tout au moins ceux qui sont non nuls).

Cet argument commun est alors celui de leur somme $S$, dont l'argument est 0 (on a vu que $S = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ est un nombre réel strictement positif). On en déduit que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\dfrac{\overline{a_k}}{|a_k|}(a_k - z)$ est un nombre réel positif ou nul.

En divisant par $|a_k| = \sqrt{a_k \overline{a_k}}$ qui est un nombre réel strictement positif, on en déduit que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\dfrac{a_k - z}{a_k}$ est un nombre réel positif ou nul.

Notons $M$ le point d'affixe $z$. Alors $a_k - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MA_k}$ et $a_k$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA_k}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overrightarrow{MA_k} = \lambda \overrightarrow{OA_k}$.
Cela implique que, pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, les points $O, A_k, M$ sont alignés.
Si $M \neq O$, alors $A_1, \ldots, A_n$ sont tous sur la droite $(OM)$, donc ils sont alignés ce qui est contraire aux hypothèses de l'énoncé. Ainsi $M = O$ et $z = 0$.

Réciproquement, si $z = 0$, on a clairement égalité dans $(*)$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{il y a égalité dans l'inégalité } (*) \text{ si, et seulement si, } z \text{ est nul.}}$$

# Exercice 4 .

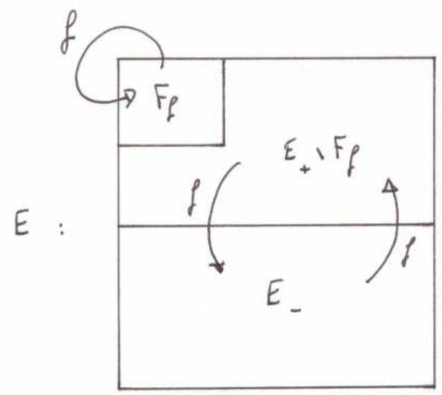
Pour construire une suite strictement monotone de $p$ nombres de l'intervalle $[\![1; n]\!]$, il suffit de choisir $p$ valeurs dans $[\![1; n]\!]$ (il y a $\binom{n}{p}$ choix), puis de choisir l'ordre, croissant

ou décroissant, de la suite : lorsque $p \geq 2$, il y a 2 choix, mais lorsque $p = 1$, il n'y a qu'un choix, la suite étant alors constituée d'un seul élément.
En conclusion, lorsque $p \geq 2$, il existe $2\binom{n}{p}$ suites strictement monotones de $p$ nombres dans l'intervalle $[\![1; n]\!]$, et lorsque $p = 1$, il en existe $n$.

# Problème : Dénombrement par involution.

## Principe d'involution .

**1°)**



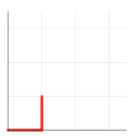

$\diamond$ Montrons que $E_- = f(E_+ \setminus F_f)$, par double inclusion :
Si $x \in E_+ \setminus F_f$, d'après l'énoncé, $f(x) \in E_-$, donc $f(E_+ \setminus F_f) \subset E_-$.
Réciproquement, soit $x \in E_-$. Posons $y = f(x)$. $f$ étant involutive, $x = f(y)$.
Si $y \in E_-$, alors $x = f(y) \in E_+$, ce qui est faux.
Si $y \in F_f$, alors $x = f(y) = y \in F_f$, ce qui est faux.
Ainsi, $y \in E_+ \setminus E_-$ et $x = f(y) \in f(E_+ \setminus F_f)$.
$\diamond$ $f$ étant bijective, on en déduit que $|E_-| = |f(E_+ \setminus F_f)| = |E_+ \setminus F_f| = |E_+| - |F_f|$, ce qui prouve que $\text{card}\, F_f = \text{card}\, E_+ - \text{card}\, E_-$.

## Chemins de Dyck.

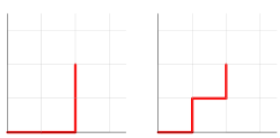
**2°)** Soit $(M_0, \ldots, M_s)$ un chemin joignant $M_0(a, b)$ et $M_s$. D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{M_0M_s} = \sum_{k=1}^{s} \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$. Notons $\alpha$ (resp : $\beta$) le nombre de $k \in \{1, \ldots, s\}$ tels que $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{\imath}$ (resp : $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{\jmath}$). Alors la relation précédente devient $\overrightarrow{M_0M_s} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$, donc $M_s$ est le point de coordonnées $(c, d)$ si et seulement si $\alpha = c - a$ et $\beta = d - b$. Ainsi, pour construire un chemin joignant les points de coordonnées $(a, b)$ et $(c, d)$, on impose $M_0(a, b)$, puis on choisit $c - a$ fois une arête horizontale et $d - b$ fois une arête verticale. Choisir un tel chemin revient donc à choisir les positions des $c - a$ arêtes horizontales parmi l'ensemble des $c - a + d - b$ arêtes au total. Les autres arêtes sont alors verticales. Donc

$$\boxed{\text{il y a } \binom{c-a+d-b}{c-a} \text{ chemins joignant les points de coordonnées } (a,b) \text{ et } (c,d).}$$

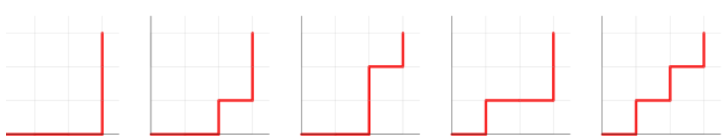
**3°)** Le chemin $(M_0(0, 0))$, de longueur nulle, est l'unique chemin joignant le point de coordonnées $(0, 0)$ à lui-même. C'est un chemin de Dyck, donc $C_0 = 1$.
Les figures suivantes indiquent les différents chemins de Dyck d'ordre 1, 2 et 3.



$\boxed{C_1 = 1.}$

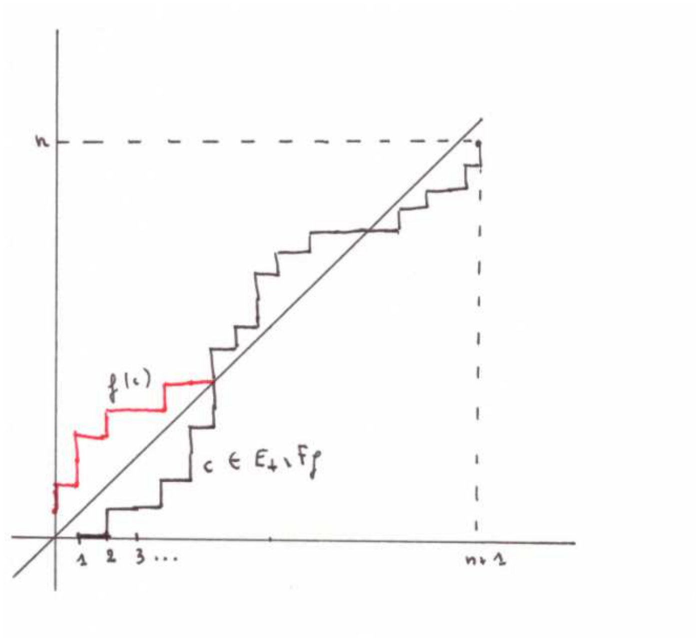


$\boxed{C_2 = 2.}$



$\boxed{C_3 = 5.}$

**4°)** La figure suivante illustre les définitions de $E$ et de $f$ : on a tracé un chemin $c$ de $E_+ \setminus F_f$ : le chemin $f(c)$ est obtenu en commençant par le chemin rouge. Ce dernier chemin est un chemin de $E_-$.




— D'après la solution de la question 2, tout chemin joignant les points de coordonnées $(a, b)$ et $(c, d)$ sont de longueur $s = (c - a) + (d - b)$, donc tous les chemins de l'ensemble $E$ sont bien de longueur $2n$.

— Considérons un chemin $(M_0, \ldots, M_{2n})$ de $E$ et supposons que l'un de ses sommets n'a pas une abscisse strictement supérieure à son ordonnée. Montrons que l'entier "$k$" de l'énoncé existe bien.
En notant $M_i(x_i, y_i)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, 2n\}$, il existe $i$ tel que $x_i \leq y_i$. Alors l'ensemble $\{i \in \{0, \ldots, 2n\} \ / \ x_i \leq y_i\}$ est une partie non vide de $\{0, \ldots, 2n\}$, donc elle possède un minimum que l'on note $k$.
On sait que $x_{2n} = n + 1 > n = y_{2n}$, donc $k < 2n$. Ainsi, $x_k \leq y_k$ et $x_{k+1} > y_{k+1}$, ce que l'on peut aussi écrire $x_k - y_k \leq 0$ et $x_{k+1} - y_{k+1} > 0$.
Or $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} \in \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, donc $(x_{k+1} = x_k + 1) \wedge (y_{k+1} = y_k)$ ou bien $(y_{k+1} = y_k + 1) \wedge (x_{k+1} = x_k)$. On en déduit que $[x_{k+1} - y_{k+1}] - [x_k - y_k] \in \{-1, 1\}$.
Or $x_k - y_k \leq 0$ et $x_{k+1} - y_{k+1} > 0$, donc $[x_{k+1} - y_{k+1}] - [x_k - y_k] = 1$, puis $x_{k+1} - y_{k+1} = 1$ et $x_k - y_k = 0$.
Ceci démontre que $x_k = y_k$ et plus précisément que $k$ est le premier indice d'un sommet où l'abscisse est égale à l'ordonnée.

— Considérons un chemin $c = (M_0, \ldots, M_{2n})$ de $E$ et supposons que l'un de ses sommets n'a pas une abscisse strictement supérieure à son ordonnée.
L'existence de $k$ étant prouvée, $f(M_0, \ldots, M_{2n})$ est définie et égale à $(\widetilde{M_0}, \ldots, \widetilde{M_k}, M_{k+1}, \ldots, M_{2n})$.
Lorsque $c \in E_+$, $M_0(1, 0)$, donc $\widetilde{M_0}(0, 1)$, donc $f(c) \in E_-$.
De même, lorsque $c \in E_-$, $f(c) \in E_+$.
Lorsque tous les sommets de $c$ ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée, $f(c) = c$.
Ceci démontre que $f$ est correctement définie, en tant qu'application de $E$ dans $E$.

— Notons $F$ l'ensemble des chemins de $E$ dont tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée.
Ce qui précède prouve que $f(E_-) \subset E_+$ et $f(E_+ \setminus F) \subset E_-$. De plus $F \subset E_+$ et, pour tout $c \in F$, $f(c) = c$. Ainsi, si $f$ est une involution, elle est alternante

et $F_f = F$. Montrons pour terminer que $f$ est bien une involution.

— Soit $c = (M_0, \ldots, M_{2n})$ un chemin de $E$.
  — Si $c \in F_f$, alors $f(c) = c$, donc $f \circ f(c) = c$.
  — Supposons que $c \in E_+ \setminus F_f$. Alors $k$ est correctement défini et $f(c) = (\widetilde{M_0}, \ldots, \widetilde{M_k}, M_{k+1}, \ldots, M_{2n}) \in E_-$.
    Pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\widetilde{M_i}(y_i, x_i)$ et $x_i > y_i$. De plus $x_k = y_k$, donc $k$ désigne encore le premier indice d'un sommet, parmi $f(c)$, où l'abscisse est égale à l'ordonnée. On en déduit que $f(f(c)) = (\widetilde{\widetilde{M_0}}, \ldots, \widetilde{\widetilde{M_k}}, M_{k+1}, \ldots, M_{2n})$, or pour tout point du plan, $\widetilde{\widetilde{M}} = M$, donc $f(f(c)) = c$.
  — De même, si $c \in E_-$, on montre que $f \circ f(c) = c$.

**5°)** La question précédente nous dit que $F_f$ est constitué des chemins joignant $(1,0)$ à $(n+1, n)$ dont tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée. L'image par la translation de vecteur $(-1, 0)$ d'un tel chemin est un chemin de Dyck d'ordre $n$. Réciproquement, l'image d'un chemin de Dyck d'ordre $n$ par la translation de vecteur $(1, 0)$ donne un élément de $F_f$. L'ensemble $F_f$ est donc en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck. Par conséquent, on a

$$\operatorname{card} F_f = C_n.$$

Le résultat de la question 2 nous dit par ailleurs que

$$\operatorname{card} E_+ = \binom{2n}{n} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card} E_- = \binom{2n}{n+1}.$$

Par conséquent, $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$,
Ainsi, $C_n = \binom{2n}{n}(1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Remarque culturelle :

Le nombre $C_n$ est le $n$-ème nombre de Catalan. Ces nombres interviennent dans de nombreux problèmes de dénombrement. Outre les chemins de Dyck, $C_n$ compte les différentes façons de placer des parenthèses autour de $n+1$ facteurs (pour préciser une expression faisant intervenir $n$ fois une loi de composition interne non associative). $C_n$ est également le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles ; le nombre de façons de découper en triangles un polygone convexe à $n+2$ côtés en reliant certains de ses sommets par des segments de droite etc.

## 3 : Formule du crible.

**6°)**
Nous allons démontrer que $f$ est bien définie et alternante puis que c'est une involution.
Soit $(x, I)$ un élément de $E$. On a donc $x \in \bigcap_{k \in I} A_k$.

- ▷ Supposons que $(x, I) \in E_+$, c'est-à-dire que $\operatorname{card} I$ est pair.
  - — Si $m(x) \notin I$, alors $f((x, I)) = (x, I \cup \{m(x)\})$. Par définition de $m(x)$, on a $x \in A_{m(x)}$ donc $x \in \bigcap_{k \in I \cup \{m(x)\}} A_k$, ce qui donne $(x, I \cup \{m(x)\}) \in E$. De plus, $I \cup \{m(x)\}$ est de cardinal impair, donc $(x, I \cup \{m(x)\}) \in E_-$. Ainsi, on a $f((x, I)) \in E_-$.
  - — Si $m(x) \in I$, alors $f((x, I)) = (x, I \setminus \{m(x)\})$. Comme $I \setminus \{m(x)\} \subset I$, on a évidemment $x \in \bigcap_{k \in I \setminus \{m(x)\}} A_k$, donc $(x, I \setminus \{m(x)\}) \in E$. De plus, $I \setminus \{m(x)\}$ est de cardinal impair, donc $(x, I \setminus \{m(x)\}) \in E_-$. Ainsi, on a $f((x, I)) \in E_-$.

  Cela démontre que $f(E_+) \subset E_-$.
  On démontre de même que $f(E_-) \subset E_+$.
  Cela démontre que $f$ est bien définie et alternante, avec $F_f = \emptyset$.
- ▷ Si $m(x) \notin I$, alors
  $(f \circ f)((x, I)) = f(x, I \cup \{m(x)\}) = (x, (I \cup \{m(x)\}) \setminus \{m(x)\}) = (x, I)$.
  Si $m(x) \in I$, alors
  $(f \circ f)((x, I)) = f(x, I \setminus \{m(x)\}) = (x, (I \setminus \{m(x)\}) \cup \{m(x)\}) = (x, I)$.
  Cela démontre que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire que $f$ est une involution.

On a ainsi démontré que $f$ est une involution alternante avec $F_f = \emptyset$.

**7°)** D'après la question 1,

$$\operatorname{card} F_f = \operatorname{card} E_+ - \operatorname{card} E_-.$$

On a

$$\operatorname{card} F_f = 0$$

et

$$\operatorname{card} E_+ = \operatorname{card}\{(x, I) \in E \ / \ \operatorname{card} I \text{ pair}\} = \sum_{\substack{I \subset [\![1;n]\!] \\ \operatorname{card} I \text{ pair}}} \sum_{x \in \bigcap_{k \in I} A_k} 1 = \sum_{\substack{I \subset [\![1;n]\!] \\ \operatorname{card} I \text{ pair}}} \operatorname{card} \bigcap_{k \in I} A_k$$

et

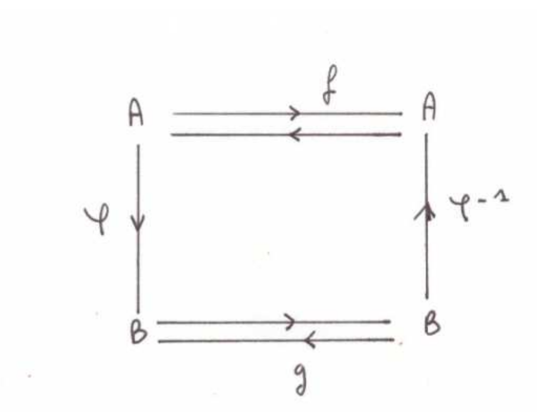
$$\operatorname{card} E_- = \operatorname{card}\{(x, I) \in E \ / \ \operatorname{card} I \text{ impair}\} = \sum_{\substack{I \subset [\![1;n]\!] \\ \operatorname{card} I \text{ impair}}} \sum_{x \in \bigcap_{k \in I} A_k} 1 = \sum_{\substack{I \subset [\![1;n]\!] \\ \operatorname{card} I \text{ impair}}} \operatorname{card} \bigcap_{k \in I} A_k.$$

Donc
$$0 = \sum_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ \text{card}\, I \text{ pair}}} \text{card} \bigcap_{k\in I} A_k - \sum_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ \text{card}\, I \text{ impair}}} \text{card} \bigcap_{k\in I} A_k$$
c'est-à-dire
$$\sum_{I\subset[\![1;n]\!]} (-1)^{\text{card}\, I} \text{card} \bigcap_{k\in I} A_k = 0$$
ou encore
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ \text{card}\, I=i}} \text{card} \bigcap_{k\in I} A_k = 0.$$
Pour $i = 0$, on a $I = \varnothing$ et l'on a convenu que $\bigcap_{k\in\varnothing} A_k = U$,

c'est-à-dire que $\bigcap_{k\in\varnothing} A_k = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, donc
$$\boxed{\text{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{\substack{I\subset[\![1;n]\!]\\ \text{card}\, I=i}} \text{card} \bigcap_{k\in I} A_k.}$$
Il s'agit bien de la formule du crible.

## 4 : Bijection de Garcia-Milne.

**8°)** La figure suivante résume l'énoncé :




Par hypothèse, $\varphi(A_+) \subset B_+$. De plus $\varphi(A_-) \subset B_-$, donc $B \setminus B_- \subset A \setminus \varphi(A_-)$, c'est-à-dire que $B_+ \subset \varphi(A_+)$. ainsi, $\varphi(A_+) = B_+$ et de même $\varphi(A_-) = B_-$. Or $\varphi$ est une bijection, donc
$$\text{card}\, A_+ = \text{card}\, B_+ \qquad \text{et} \qquad \text{card}\, A_- = \text{card}\, B_-.$$

Le principe d'involution appliqué à $f$ et à $g$ donne

$$\mathrm{card}\, F_f = \mathrm{card}\, A_+ - \mathrm{card}\, A_- = \mathrm{card}\, B_+ - \mathrm{card}\, B_- = \mathrm{card}\, F_g,$$

donc

$$\boxed{\mathrm{card}\, F_f = \mathrm{card}\, F_g.}$$

**9°)** Soit $x \in F_f$. Par l'absurde : on suppose que pour tout entier naturel $k$, on a $(H_k)\ :\ \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \notin F_g$.

$\diamond$ Montrons par récurrence que pour tout entier naturel $k$,
on a $R(k)\ :\ \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in B_+ \setminus F_g$ .

Pour $k = 0$, $x \in F_f$, donc $x \in A_+$ puis $\varphi(x) \in B_+$. De plus, d'après $(H_0)$, $\varphi(x) \notin F_g$, donc $\varphi(x) \in B_+ \setminus F_g$, ce qui prouve $R(0)$.
Supposons maintenant que $k \geq 0$ et que $R(k)$ est vraie.
Posons $y = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x)$. D'après $R(k)$, $y \in B_+ \setminus F_g$, donc $g(y) \in B_-$, puis $z = \varphi f \varphi^{-1} g(y) \in B_+$.
Mais $z = (\varphi f \varphi^{-1} g)\varphi(f\varphi^{-1} g\varphi)^k = \varphi(f\varphi^{-1} g\varphi)^{k+1}$, donc d'après $(H_{k+1})$, $z \notin F_g$. Ceci démontre que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{k+1}(x) \in B_+ \setminus F_g$, ce qui prouve $R(k+1)$.
$\diamond$ Comme les ensembles sont finis, le principe des tiroirs dit qu'il existe $i > j \geq 0$ tels que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^i(x) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j(x)$, c'est-à-dire $(f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^\ell(x) = x$ où $\ell = i - j$ est un entier naturel non nul.

Comme $f(x) = x$, en utilisant que $f$ et $g$ sont des involutions, on en déduit que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\ell-1}(x) = (g \circ \varphi)(x)$.

Le membre de gauche est dans $B_+ \setminus F_g$ alors que le membre de droite est dans $F_g \sqcup B_-$.
C'est absurde donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } F_f, \text{ il existe un entier naturel } \alpha(x) \text{ tel que } \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\alpha(x)}(x) \in F_g.}$$

**10°)** Pour tout élément $x$ de $F_f$,
l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$.
D'après le cours, on peut poser

$$r(x) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\}.$$

On considère alors l'application

$$\psi \left\{ \begin{array}{ccc} F_f & \longrightarrow & F_g \\ x & \longmapsto & \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x)}(x) \end{array} \right.$$

Soient $x_1, x_2 \in F_f$ tels que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, c'est-à-dire

$$\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)}(x_1) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_2)}(x_2).$$

Par l'absurde : on suppose que $r(x_1) \neq r(x_2)$, par exemple $r(x_1) > r(x_2)$.
Il vient
$$(f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)-r(x_2)}(x_1) = x_2$$
puis, comme $f(x_2) = x_2$,
$$\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)-r(x_2)-1}(x_1) = (g^{-1} \circ \varphi)(x_2).$$
Comme $0 \leq r(x_1) - r(x_2) - 1 < r(x_1)$, la minimalité de $r(x_1)$ nous dit que le membre de gauche appartient à $B_+ \setminus F_g$ (en adaptant la récurrence de la question précédente) alors que le membre de droite est dans $F_g \sqcup B_-$. C'est absurde, donc $r(x_1) = r(x_2)$.
La relation $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)}(x_1) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_2)}(x_2)$ nous dit alors que $x_1 = x_2$.
L'application $\psi$ est donc injective.
Comme $\operatorname{card} F_f = \operatorname{card} F_g$, on peut affirmer que $\psi$ est une bijection entre $F_f$ et $F_g$.
En conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } \psi : F_f \longrightarrow F_g \text{ définie par } \forall x \in F_f,\ \psi(x) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x)}(x) \text{ où } r(x) = \min\{k \in \mathbb{N} : \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\} \text{ est une bijection entre } F_f \text{ et } F_g.}$$