DS 4 : Énoncé.

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 3x+2 \rfloor = \lfloor x+3 \rfloor$.

Exercice 2 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Dénombrer les bijections f, de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même, telles que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $(k \equiv 1\ [3]) \Longleftrightarrow (f(k) \equiv 1\ [3])$.

2°) Dénombrer les applications de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même, telles que, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, $(k \equiv 1\ [3]) \Longleftrightarrow (f(k) \equiv 1\ [3])$.

Exercice 3 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^{2k} 3^k b^{-k}$.

Exercice 4 :

Calculer les primitives de $f(x) = \sin(\ln x)$ selon deux méthodes.

Problème : Théorème de Ramsey

Définitions et notations

- Lorsque $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x, c'est-à-dire le plus petit entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq k$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.
  En particulier, $\mathbb{N}_0 = \emptyset$.
- Lorsque V est un ensemble et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_k(V)$ l'ensemble des parties de V qui sont de cardinal k.

- Un graphe (non orienté) est un couple (V, E) où :
  - V est un ensemble dont les éléments sont appelés les sommets du graphe ;
  - E est une partie de $\mathcal{P}_2(V)$, dont les éléments sont appelés les arêtes du graphe. Chaque arête est donc une paire de sommets.
    Si $A = \{a, b\} \in E$, on dira que A est l'arête reliant les sommets a et b.
- Le graphe (V, E) est dit *complet* lorsque $E = \mathcal{P}_2(V)$, c'est-à-dire si toute paire de sommets est reliée par une arête. Les graphes utilisés dans ce problème sont tous complets.
- On note $K(V)$ l'unique graphe complet dont les sommets sont les éléments de V. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n = K(\mathbb{N}_n)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et (V, E) un graphe. Un coloriage en k couleurs des arêtes du graphe (V, E) est une application c de E dans un ensemble C de cardinal k. Pour tout $A \in E$, on dit alors que $c(A)$ est la couleur de l'arête A.
- Lorsque $W \subset V$, on dit que le graphe complet $K(W)$ est un sous-graphe complet du graphe complet $K(V)$.
- Supposons que le graphe complet $K(V)$ est muni d'un coloriage c et soit $W \subset V$. On dit que le sous-graphe complet $K(W)$ est *monochrome* si et seulement si toutes les arêtes reliant deux sommets de W sont coloriées de la même couleur, c'est-à-dire si et seulement si la restriction de c à $\mathcal{P}_2(W)$ est une application constante. En particulier, lorsque W est de cardinal 3 et que $K(W)$ est monochrome, on dit que $K(W)$ est un triangle monochrome.

Partie I : Principe des tiroirs

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et V un ensemble de cardinal n.
Déterminer le nombre d'arêtes du graphe complet $K(V)$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et V un ensemble de cardinal n. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit C un ensemble de cardinal k. Déterminer le nombre de coloriages possibles en k couleurs du graphe complet $K(V)$, lorsqu'on impose aux k couleurs d'être dans C.

3°) Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$. Soit B un ensemble de cardinal n et C un ensemble de cardinal k.
Soit $f : B \to C$ une application.
Calculer $\displaystyle\sum_{l \in C} |f^{-1}(\{l\})|$.
En déduire qu'il existe $l \in C$ tel que $|f^{-1}(\{l\})| \geq \lceil \frac{n}{k} \rceil$.
Ce résultat est une variante du principe des tiroirs.

Partie II : Triangles monochromes

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note T_k le plus petit entier N, s'il existe, tel que pour tout ensemble V de cardinal N et pour tout coloriage de $K(V)$ en k couleurs, il existe $W \subset V$ tel que $K(W)$ soit un triangle monochrome.

4°) Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit V et V' deux ensembles de cardinal N. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que, pour tout coloriage de $K(V)$ en k couleurs, il existe $W \subset V$ tel que $K(W)$ est un triangle monochrome. Montrer que, pour tout coloriage de $K(V')$ en k couleurs, il existe $W' \subset V'$ tel que $K(W')$ est un triangle monochrome.

5°) On considère sur K_6 un coloriage en 2 couleurs.
Montrer qu'il existe au moins trois arêtes issues du sommet 1 qui sont de la même couleur.
Montrer qu'il existe $W \subset \mathbb{N}_6$ tel que $K(W)$ est un triangle monochrome.

6°) En déduire que $T_2 = 6$.

7°) Soit $k \geq 3$. On suppose que T_{k-1} existe.
Montrer que $T_k \leq kT_{k-1} - k + 2$: pour cela, on pourra considérer le graphe complet K_n, avec n bien choisi, que l'on coloriera en k couleurs, et on appliquera le principe des tiroirs aux arêtes issues d'un sommet 1.

8°) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k existe et que $T_k \leq 3(k!)$.

Partie III : Minoration d'Erdös

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $(m_1, \dots, m_k)$ un k-uplet d'entiers supérieurs ou égaux à 2.
On note $R(m_1, \dots, m_k)$ le plus petit entier N, s'il existe, tel que

- pour tout ensemble V de cardinal N,
- pour tout coloriage de $K(V)$ en k couleurs, et pour toute numérotation $c_1, \dots, c_k$ de ces k couleurs,
- il existe $i \in \mathbb{N}_k$ et un sous-ensemble W de V de cardinal m_i tel que $K(W)$ soit monochrome de couleur c_i.

9°) Montrer que pour tout $m \geq 2$, $R(m)$ existe et donner sa valeur.

En partie IV, on montrera que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout k-uplet $(m_1, \dots, m_k)$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, $R(m_1, \dots, m_k)$ existe. Il s'agit du théorème de Ramsey. Dans cette partie, on admet que, pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $R(m, m)$ existe, et on veut montrer que pour $m \geq 2$, $R(m, m) \geq 2^{\frac{m}{2}}$, une minoration due à Erdös.

10°) Vérifier cette minoration pour $m = 2$ et $m = 3$.

11°) On suppose que I est un ensemble fini et que, pour tout $i \in I$, A_i est un ensemble fini. Montrer par récurrence sur le cardinal de I que $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \sum_{i \in I} |A_i|$.

12°) Soit $m \in \mathbb{N}$, avec $m \geq 4$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N < 2^{\frac{m}{2}}$.
Soit V un ensemble de cardinal N et $C = \{c_1, c_2\}$ un ensemble de cardinal 2.
Lorsque $A \in \mathcal{P}_m(V)$, on note $C(A)$ l'ensemble des coloriages $c : \mathcal{P}_2(V) \to C$ en 2 couleurs de $K(V)$ tels que $K(A)$ soit monochrome de couleur c_1.
Montrer que $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}_m(V)} |C(A)| = \binom{N}{m} 2^{\binom{N}{2} - \binom{m}{2}}$.

On note D le nombre de coloriages $c : \mathcal{P}_2(V) \to C$ en 2 couleurs de $K(V)$ pour lesquels il existe $A \in \mathcal{P}_m(V)$ tel que $K(A)$ est un sous-graphe complet monochrome de couleur c_1. Montrer que D est strictement inférieur à la moitié du nombre total de coloriages de $K(V)$ avec les deux couleurs c_1 et c_2 : on pourra commencer par montrer que $\binom{N}{m} \leq \dfrac{N^m}{2^{m-1}}$.

13°) En déduire la minoration d'Erdös.

Partie IV : Théorème de Ramsey

14°) Soit $k \geq 2$. On suppose que $(m_1, \dots, m_{k-1})$ est un $(k-1)$-uplet d'entiers supérieurs ou égaux à 2, tel que $R(m_1, \dots, m_{k-1})$ existe.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, montrer que $R(m_1, \dots, m_{i-1}, 2, m_i, \dots, m_{k-1}) = R(m_1, \dots, m_{k-1})$, où lorsque $i = 1$, $R(m_1, \dots, m_{i-1}, 2, m_i, \dots, m_{k-1})$ désigne $R(2, m_1, \dots, m_{k-1})$ et lorsque $i = k$, $R(m_1, \dots, m_{i-1}, 2, m_i, \dots, m_{k-1})$ désigne $R(m_1, \dots, m_{k-1}, 2)$.

15°) Soit $(m_1, \dots, m_k)$ un k-uplet d'entiers au moins égaux à 3.
On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $R(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_k)$ existe.
On pose $R'_i = R(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_k)$.
Soit n un entier tel que $n \geq \left(\sum_{i=1}^{k} R'_i\right) - (k-2)$.
On suppose que V est un ensemble de cardinal n et que c est un coloriage de $K(V)$ en k couleurs, notées $c_1, \dots, c_k$.
On fixe un élément v dans V.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, on note $\Gamma_i(v)$ l'ensemble des éléments w de $V \setminus \{v\}$ tels que l'arête $\{v, w\}$ est de couleur c_i.
Montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}_k$ tel que $|\Gamma_i(v)| \geq R'_i$.
En déduire que $R(m_1, \dots, m_k)$ existe et que $R(m_1, \dots, m_k) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} R'_i\right) - (k-2)$.

16°) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout k-uplet $(m_1, \dots, m_k)$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, $R(m_1, \dots, m_k)$ existe.

17°) Déduire de l'inégalité établie à la fin de la question 15 que, pour tout couple (m_1, m_2) d'entiers supérieurs ou égaux à 2, $R(m_1, m_2) \leq \binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1}$.