DS 4 : Corrigé

Barème

Le barème comporte 53 points dont voici la répartition :

- Exercices (8 points) : 2,3,1,2.
- Partie I (5 points) : 1,1,3.
- Partie II (15 points) : 3,3,4,3,2.
- Partie III (11 points) : 1,1,2,5,2.
- Partie IV (14 points) : 5,5,2,2.

Exercices

Exercice 1 :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons (E) l'équation de l'énoncé. Alors
$(E) \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N},\ \ 3x+2, x+3 \in [n, n+1[)$, donc
$(E) \Longrightarrow |(3x+2)-(x+3)| < 1 \Longrightarrow |2x-1| < 1 \Longrightarrow 2x \in]0,2[$, ainsi $(E) \Longrightarrow x \in]0,1[$.
Si $x \notin]0,1[$, x n'est pas solution.
Supposons que $x \in]0,1[$. Alors
$(E) \Longleftrightarrow \lfloor 3x-1 \rfloor = \lfloor x \rfloor = 0 \Longleftrightarrow 0 \leq 3x-1 < 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

Exercice 2 :

1°) Notons $T = \{k \in \mathbb{N}_n \ / \ k \equiv 1 \ [3]\}$.
$T = \{3h+1 \ / \ h \in \mathbb{Z} \text{ et } 1 \leq 3h+1 \leq n\} = \{3h+1 \ / \ h \in \mathbb{Z} \text{ et } 0 \leq h \leq \frac{n-1}{3}\}$, donc $|T| = 1 + \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{3} + 1 \rfloor$. Ainsi, $|T| = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$.
Pour construire une bijection f de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, telle que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $(k \equiv 1 \ [3]) \Longleftrightarrow (f(k) \equiv 1 \ [3])$, il suffit de construire $f|_T^T$, qui sera une bijection de T dans T (il y a $|T|!$ choix), puis de construire $f|_{\mathbb{N}_n \setminus T}^{\mathbb{N}_n \setminus T}$, qui sera également une bijection (il y a $(n-|T|)!$ choix). On obtient ainsi toutes les bijections attendues, exactement une fois. Ainsi, le nombre de telles bijections est égal à $\boxed{(t!)((n-t)!), \text{ où } t = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor}$.

2°) Pour construire une telle application, il suffit de reprendre le procédé de la première question en remplaçant le mot *bijection* par le mot *application*. On en déduit que le nombre de telles applications est égal à $\boxed{t^t(n-t)^{n-t}, \text{ où } t = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor}$.

Exercice 3 :

$$\sum_{k=1}^{n} a^{2k}3^k b^{-k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3a^2}{b}\right)^k = \frac{3a^2}{b} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3a^2}{b}\right)^k.$$

Si $b = 3a^2$, alors $\sum_{k=1}^{n} a^{2k}3^k b^{-k} = n$.

Si $b \neq 3a^2$, alors $\sum_{k=1}^{n} a^{2k}3^k b^{-k} = \frac{3a^2}{b} \frac{1-(\frac{3a^2}{b})^n}{1-\frac{3a^2}{b}}$, donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a^{2k}3^k b^{-k} = \left(\frac{3a^2}{b^n}\right) \frac{b^n - 3^n a^{2n}}{b - 3a^2}}$

.

Exercice 4 :

f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut donc calculer ses primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
Première méthode : une double intégration par parties donne
$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$,
donc $\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)) + k$.
Seconde méthode :
$\int \sin(\ln x)dx = \int \mathrm{Im}(e^{i\ln x})dx$,
or $\int e^{i\ln x}dx = \int x^i dx = \dfrac{x^{i+1}}{i+1} + k = \dfrac{1-i}{2} x e^{i\ln x} + k = \dfrac{1-i}{2} x(\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)) + k$,
donc $\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)) + k$.

Problème : Théorème de Ramsey

Ce problème est largement inspiré d'un sujet de M. Troesch, merci à lui.

Partie I : Principe des tiroirs

1°) Un graphe complet possède autant d'arêtes que de paires de sommets distincts.
Le nombre d'arêtes est donc $|\mathcal{P}_2(V)| = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2°) Un tel coloriage de $K(V)$ est une application quelconque de $\mathcal{P}_2(V)$ dans C, donc d'après le cours, le nombre de coloriages demandé est égal à $\boxed{k^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

3°) $\diamond$ Les ensembles $f^{-1}(\{l\})$ pour $l \in C$ forment une partition de l'ensemble de départ B, car pour tout $x \in B$, il existe un unique $l \in C$ (à savoir $f(x)$) tel que $x \in f^{-1}(\{l\})$.
Ainsi, $\sum_{l \in C} |f^{-1}(\{l\})| = |B| = n$.

$\diamond$ Raisonnons par l'absurde. Supposons que pour tout $l \in C$, $|f^{-1}(\{l\})| < \lceil \frac{n}{k} \rceil$.
Puisqu'il s'agit d'entiers, cela implique $|f^{-1}(\{l\})| \leq \lceil \frac{n}{k} \rceil - 1$, pour tout $l \in C$.
De plus, par définition de la partie entière par excès, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.
En particulier, $\lceil \frac{n}{k} \rceil - 1 < \frac{n}{k}$.
En sommant ces inégalités : $n = \displaystyle\sum_{l \in C} |f^{-1}(\{l\})| < \sum_{l \in C} \frac{n}{k} = n$.
C'est faux, donc il existe $l \in C$ tel que $|f^{-1}(\{l\})| \geq \lceil \frac{n}{k} \rceil$.

Partie II : Triangles monochromes

4°) Soit $c' : \mathcal{P}_2(V') \longrightarrow C$ un coloriage de V' en k couleurs.
Par hypothèse, V et V' ont le même cardinal, donc d'après le cours, il existe une bijection f de V dans V'.
Pour tout $\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(V)$, posons $c(\{a, b\}) = c'(\{f(a), f(b)\})$.
Alors c est un coloriage de V en k couleurs. D'après l'hypothèse de l'énoncé, il existe $W \subset V$ tel que $K(W)$ est un triangle monochrome pour le coloriage c. Ainsi, il existe $i \in C$ tel que, pour tout $\{a, b\} \in \mathcal{P}_2(W)$, $c(\{a, b\}) = i = c'(\{f(a), f(b)\})$.
Posons $W' = f(W)$. Alors, pour tout $\{a', b'\} \in \mathcal{P}_2(W')$, $c'(\{a', b'\}) = i$, donc $K(W')$ est un triangle monochrome pour le coloriage c', ce qu'il fallait démontrer.

5°) $\diamond$ Notons B l'ensemble des 5 arêtes issues de 1. Notons $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{N}_6) \to C$ le coloriage considéré par l'énoncé, où C est un ensemble de cardinal 2.
On peut appliquer la question 3 à la restriction de f à B : il existe $c \in C$ tel que $|(f|_B)^{-1}(\{c\})| \geq \lceil \frac{5}{2} \rceil = 3$. Ceci prouve qu'il existe une couleur c telle qu'au moins trois arêtes issues du sommet 1 sont de la couleur c.
$\diamond$ Il existe donc au moins trois sommets x, y, z dans $\mathbb{N}_6 \setminus \{1\}$ reliés à 1 par une arête de couleur c.
Si l'une des arêtes $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ ou $\{x, z\}$ est de couleur c, alors cette arête forme avec le sommet 1 un triangle monochrome de couleur c.
Sinon, cela signifie que les trois arêtes $\{x, y\}$, $\{y, z\}$ et $\{x, z\}$ sont toutes de l'autre couleur. Elles forment alors un triangle monochrome de l'autre couleur.
Dans tous les cas, K_6 contient un triangle monochrome.

6°) $\diamond$ Notons Q l'ensemble des entiers N tels que pour tout ensemble V de cardinal N et pour tout coloriage de $K(V)$ en 2 couleurs, il existe $W \subset V$ tel que $K(W)$ soit un triangle monochrome. D'après la question précédente et d'après la question 4, $6 \in Q$, donc Q est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Ainsi, Q possède un minimum, donc T_2 est bien défini et $T_2 = \min(Q) \leq 6$.
$\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}_5$, posons $M_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$ et notons $V = \{M_k \ / \ k \in \mathbb{N}_5\}$. Ainsi, V est un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité de $\mathbb{C}$. Colorions $K(V)$ avec deux couleurs, en prenant la couleur 1 pour les arêtes du pourtour du pentagone et la couleur 2 pour les autres arêtes. Ainsi, les arêtes de couleur 1 sont exactement les (M_k, M_{k+1}) où $k \in \mathbb{N}_5$, en convenant que $M_6 = M_1$.

Alors, on peut vérifier qu'aucun des $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$ triangles de $K(V)$ ne sont monochromes en les listant. On peut aussi le démontrer : Un triangle de $K(V)$ est formé par 3 sommet M_i, M_j et M_k de V. On peut supposer sans perte de généralité que $1 \leq i \leq j \leq k \leq 5$. Convenons que $M_i = M_{i+5}$.
On calcule que $(j-i) + (k-j) + ((i+5) - k) = 5$. Donc les entiers $j - i$, $k - j$ et $(i + 5) - k$ ne sont pas tous supérieurs à 2 et ne sont pas tous égaux à 1. Ainsi, parmi ces entiers, l'un au moins vaut 1 et un autre au moins est supérieur à 2. Cela signifie que parmi les 3 arêtes du triangle, l'une est au moins est sur le pourtour et une autre au moins n'est pas sur le pourtour, donc le triangle n'est pas monochrome.
Il existe donc un coloriage de $K(V)$ qui ne contient aucun triangle monochrome. Avec la question 4, cela prouve que $5 \notin Q$.
$\diamond$ Soit maintenant V' un ensemble de cardinal inférieur à 5. Il existe un ensemble V de cardinal 5 tel que $V' \subset V$. D'après le point précédent, il existe un coloriage c de $K(V)$ pour lequel $K(V)$ ne contient aucun triangle monochrome. Alors la restriction de c à $\mathcal{P}_2(V')$ est un coloriage de $K(V')$ qui ne fait apparaître aucun triangle monochrome. Donc pour tout $N \leq 5$, $N \notin Q$.
En conclusion, on a montré que $T_2 = \min(Q) = 6$.

7°) Posons $n = kT_{k-1} - k + 2$. Considérons un coloriage c de K_n en k couleurs.
K_n possède exactement $n - 1$ arêtes issues du sommet 1.
D'après le principe des tiroirs, appliqué à la restriction de c à ces $n - 1$ arêtes, il existe une couleur i telle que 1 soit relié à au moins $\lceil \frac{n-1}{k} \rceil$ sommets par une arête de couleur i. Notons W l'ensemble de ces sommets.
Or $n-1 = kT_{k-1}-k+1 = k(T_{k-1}-1)+1$, donc $\frac{n-1}{k} = T_{k-1}-1+\frac{1}{k}$. Ainsi, $\lceil \frac{n-1}{k} \rceil = T_{k-1}$, ce qui prouve que $|W| \geq T_{k-1}$.
$\diamond$ Si deux sommets de W sont reliés par une arête de couleur i, ils forment avec 1 un triangle monochrome de couleur i.
$\diamond$ Sinon, toutes les arêtes du graphe complet $K(W)$ sont coloriées avec les $k-1$ autres couleurs, différentes de la couleur i. Or $|W| \geq T_{k-1}$. Par définition de T_{k-1}, le graphe $K(W)$ contient un triangle monochrome.
Dans tous les cas, on a trouvé un triangle monochrome dans K_n.
Alors, d'après la question 4, on a montré que T_k existe avec $T_k \leq kT_{k-1} - k + 2$.

8°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Démontrons par récurrence la propriété $R(k)$ suivante : T_k existe et $T_k \leq 3(k!)$.
Pour $k = 1$, $T_1 = 3$. En effet, un graphe complet de moins de 2 sommets ne contient aucun triangle, dont a fortiori aucun triangle monochrome, quelque soit le coloriage choisi. Cependant, un graphe complet possédant 3 sommets forme un triangle, lequel est bien monochrome si le coloriage utilise $k = 1$ couleur. Ainsi $R(1)$ est vraie.
Pour $k = 2$, on a vu que T_2 existe avec $T_2 = 6 = 3(2!)$, donc $R(2)$ est vraie.
Supposons que $k \geq 3$ et que $R(k-1)$ est vraie. D'après la question précédente, en tenant compte du fait que $-k + 2 \leq 0$, T_k existe et
$T_k \leq kT_{k-1} - k + 2 \leq k(3 \cdot (k-1)!) = 3 \cdot k!$. Ainsi, $R(k)$ est vrai.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k existe et $T_k \leq 3(k!)$.

Partie III : Une minoration d'Erdös

9°) Soit V un ensemble de cardinal $N \in \mathbb{N}$, que l'on colorie à l'aide d'une seule couleur. Alors pour toute partie W de V, $K(W)$ est monochrome, donc V contient une partie W de cardinal m telle que $K(W)$ est monochrome si et seulement si V contient une partie de cardinal m, donc si et seulement si $|V| \geq m$. Ainsi, $R(m)$ existe et $\boxed{R(m) = m}$.

10°) $\diamond$ Soit $V = \{a, b\}$ un ensemble de cardinal 2. Alors le graphe complet $K(V)$ ne possède qu'une seule arête, qui est donc monochrome, quel que soit le coloriage utilisé. On en déduit que $R(2, 2) = 2$. Par ailleurs, lorsque $m = 2$, $2^{\frac{m}{2}} = 2$, donc la minoration d'Erdös est vraie lorsque $m = 2$.
$\diamond$ En confrontant les deux définitions données en début de parties II et III, on voit que $R(3, 3) = T_2 = 6$, donc, lorsque $m = 3$,
$R(m, m) \geq 2^{\frac{m}{2}} \iff 6 \geq 2^{\frac{3}{2}} \iff 6^2 \geq 2^3 \iff 36 \geq 8$, ce qui est vrai.

11°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ l'assertion suivante :
Pour tout ensemble I de cardinal n et pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ constituée de n ensembles finis, $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \sum_{i \in I} |A_i|$.
Lorsque $n = 0$, soit I un ensemble de cardinal 0. Alors $I = \emptyset$. Soit $(A_i)_{i \in \emptyset}$ une famille vide d'ensembles. Alors $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ et $\sum_{i \in \emptyset} |A_i| = 0$, donc $R(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $R(n - 1)$.
Soit I un ensemble de cardinal n et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles finis. Comme I est de cardinal non nul, on dispose de $i_0 \in I$. Ainsi :
$\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0} \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i$, donc d'après le cours,
$$\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| = \Big|\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i\Big| + |A_{i_0}| - \Big|\Big(\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i\Big) \cap A_{i_0}\Big| \leq \Big|\bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} A_i\Big| + |A_{i_0}|.$$
Alors d'après $R(n - 1)$, $\Big|\bigcup_{i \in I} A_i\Big| \leq |A_{i_0}| + \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} |A_i| = \sum_{i \in I} |A_i|$. Ceci prouve $R(n)$.
D'après le principe de récurrence, l'inégalité est vraie pour tout ensemble I fini.

12°) $\diamond$ Soit $A \in \mathcal{P}_m(V)$. Pour construire un coloriage appartenant à $C(A)$, la couleur des arêtes de $K(A)$ étant fixée, il reste à choisir les couleurs des autres arêtes, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{P}_2(V) \setminus \mathcal{P}_2(A)$: il y 2 choix de couleurs pour chacune de ces arêtes, qui sont au nombre de $\binom{N}{2} - \binom{m}{2}$. Ainsi, $C(A)$ est de cardinal $2^{\binom{2}{N} - \binom{2}{m}}$.

Alors, $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}_m(V)} |C(A)| = 2^{\binom{N}{2} - \binom{m}{2}} |\mathcal{P}_m(V)| = \binom{N}{m} 2^{\binom{N}{2} - \binom{m}{2}}$

$\diamond$ $\binom{N}{m} = \dfrac{N(N-1)\dots(N-m+1)}{m!}$, or pour tout $h \in \{N-m+1, \dots, N\}$, $h \le N$, donc $N(N-1)\dots(N-m+1) \le N^m$ et, pour tout $h \in \{2, \dots, m\}$, $h \ge 2$, donc $m! \ge 2^{m-1}$. Ainsi, $\binom{N}{m} \le \dfrac{N^m}{2^{m-1}}$.

$\diamond$ On en déduit que $\binom{N}{m} 2^{-\binom{m}{2}} \le \dfrac{N^m}{2^{m-1}} 2^{-\frac{m(m-1)}{2}}$, or par hypothèse, $N < 2^{\frac{m}{2}}$, donc $\binom{N}{m} 2^{-\binom{m}{2}} < \dfrac{(2^{\frac{m}{2}})^m}{2^{m-1}} 2^{-\frac{m^2-m}{2}} = 2^{\frac{m^2}{2}-(m-1)-\frac{m^2-m}{2}} = 2^{1-\frac{m}{2}}$.

Comme $m \ge 4$, on a $2^{1-\frac{m}{2}} \le 2^{1-\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}$. Ainsi, $\binom{N}{m} 2^{-\binom{m}{2}} < \dfrac{1}{2}$.

Or $D = \left| \bigcup_{A \in \mathcal{P}_m(V)} C(A) \right|$, donc d'après la question précédente, $D \le \sum_{A \in \mathcal{P}_m(V)} |C(A)|$.

Ainsi, $D < \frac{1}{2} 2^{\binom{N}{2}}$. C'est ce qu'il fallait démontrer car d'après la question 2, $2^{\binom{N}{2}}$ est égal au nombre total de coloriages de $K(V)$ avec les deux couleurs c_1 et c_2.

13°) Notons $\mathcal{D}$ (respectivement : $\mathcal{E}$) l'ensemble des coloriages $c : \mathcal{P}_2(V) \to C$ en 2 couleurs de $K(V)$ pour lesquels il existe $A \in \mathcal{P}_m(V)$ tel que $K(A)$ est un sous-graphe complet monochrome de couleur c_1 (respectivement c_2).
Le raisonnement précédent ne dépend pas de la couleur utilisée, donc on obtient également que $|\mathcal{E}| < \frac{1}{2} 2^{\binom{N}{2}}$.
Or $|\mathcal{D} \cup \mathcal{E}| \le |\mathcal{D}| + |\mathcal{E}|$, donc $|\mathcal{D} \cup \mathcal{E}|$ est strictement inférieur au nombre total de coloriages de $K(V)$ avec les deux couleurs c_1 et c_2. Il existe donc au moins un coloriage $c : \mathcal{P}_2(V) \to C$ en 2 couleurs de $K(V)$ pour lequel, pour tout $W \subset V$ avec $|W| = m$, $K(W)$ n'est pas monochrome. Ceci démontre que $R(m, m) \ne N$, dès que $N \le 2^{\frac{m}{2}}$.
Ainsi, on a montré que $R(m, m) \ge 2^{\frac{m}{2}}$.

Partie IV : Théorème de Ramsey

14°) Soit $i \in \mathbb{N}_k$. Notons $(m'_1, \dots, m'_k) = (m_1, \dots, m_{i-1}, 2, m_i, \dots, m_{k-1})$.
$\diamond$ Posons $N = R(m_1, \dots, m_{k-1})$. Soit V un ensemble de cardinal N et soit c un coloriage de $\mathcal{P}_2(V)$ dans $C = \{c_1, \dots, c_k\}$.
S'il existe une arête de $K(V)$ de couleur c_i, alors en notant W l'ensemble des deux sommets de cette arête, on a $|W| = 2 = m'_i$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c_i.
Sinon, alors la couleur c_i n'est pas atteinte, donc c est un coloriage de $\mathcal{P}_2(V)$ dans $C' = \{c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k\}$. Notons $(c'_1, \dots, c'_{k-1}) = (c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k)$. Alors, sachant que $N = R(m_1, \dots, m_{k-1})$, il existe $j \in \mathbb{N}_{k-1}$ et $W \subset V$ tel que $|W| = m_j$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c'_j.
Si $j \le i-1$, alors $c'_j = c_j$ et $m_j = m'_j$, donc $|W| = m'_j$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c_j.
si $j \ge i$, alors $c'_j = c_{j+1}$ et $m_j = m'_{j+1}$, donc $|W| = m'_{j+1}$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c_{j+1}.

Ainsi, dans tous les cas, on a trouvé $j \in \mathbb{N}_k$ et $W \subset V$ tel que $|W| = m'_j$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c_j.
Ceci prouve que $R(m_1, \ldots, m_{i-1}, 2, m_i, \ldots, m_{k-1})$ existe et
que $R(m_1, \ldots, m_{i-1}, 2, m_i, \ldots, m_{k-1}) \leq R(m_1, \ldots, m_{k-1})$.
$\diamond$ Notons maintenant $N = R(m_1, \ldots, m_{i-1}, 2, m_i, \ldots, m_{k-1})$. Soit V un ensemble de cardinal N et c un coloriage de $\mathcal{P}_2(V)$ dans $C = \{c_1, \ldots, c_{k-1}\}$. On peut alors considérer que c est un coloriage à valeurs dans $C' = \{c_1, \ldots, c_{i-1}, d, c_i, \ldots, c_{k-1}\}$, où d est un élément qui n'est pas dans C. Notons $(c'_1, \ldots, c'_k) = (c_1, \ldots, c_{i-1}, d, c_i, \ldots, c_{k-1})$. Sachant que $N = R(m'_1, \ldots, m'_k)$, il existe $j \in \mathbb{N}_k$ et $W \subset V$ tel que $|W| = m'_j$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c'_j. Or la couleur d n'est pas atteinte, donc $j \neq i$, donc il existe $j \in \mathbb{N}_{k-1}$ tel que $|W| = m_j$ et $K(W)$ est monochrome de couleur c_j.
Ceci prouve que $R(m_1, \ldots, m_{i-1}, 2, m_i, \ldots, m_{k-1}) \geq R(m_1, \ldots, m_{k-1})$, ce qui conclut.

15°) $\diamond$ On raisonne par l'absurde en supposant que pour tout $j \in \mathbb{N}_k$, $|\Gamma_j(v)| \leq R'_j - 1$. Les ensembles $\Gamma_j(v)$ forment une partition de $V \setminus \{v\}$, car chaque arête issue de v a une unique couleur, donc $n - 1 = \sum_{j=1}^{k} |\Gamma_j(v)| \leq \sum_{j=1}^{k} (R'_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{k} R'_j\right) - k$.
Or, par hypothèse, $n \geq \left(\sum_{j=1}^{k} R'_j\right) - k + 2$, donc $n - 1 > \left(\sum_{j=1}^{k} R'_j\right) - k$, ce qui est absurde. Il existe donc bien un indice i tel que $|\Gamma_i(v)| \geq R(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_k)$.
$\diamond$ Posons $W = \Gamma_i(v)$. On a $|W| \geq R(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_k)$ et la restriction de c à $\mathcal{P}_2(W)$ est un coloriage de $K(W)$ avec les k couleurs $c_1, \ldots, c_k$, donc,
en posant $(m'_1, \ldots, m'_k) = (m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_k)$, il existe $Z \subset W$ et $j \in \mathbb{N}_k$ tels que $|Z| = m'_j$ et $K(Z)$ est monochrome de couleur c_j.
Si $j \neq i$, alors Z est une partie de V telle que $|Z| = m_j$ et $K(Z)$ est monochrome de couleur c_j.
Supposons maintenant que $j = i$. Tous les éléments de Z sont dans $\Gamma_i(v)$, donc ils sont reliés à v par une arête de couleur c_i. Ainsi, en posant $Z' = Z \cup \{v\}$, on a $|Z'| = m'_i + 1 = m_i$ et $K(Z')$ est monochrome de couleur c_i.
Ceci prouve que $R(m_1, \ldots, m_k)$ existe et
que $R(m_1, \ldots, m_k) \leq \left(\sum_{i=1}^{k} R(m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_k)\right) - k + 2$.

16°) Procédons par récurrence.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $R(k)$ la propriété suivante : pour tout k-uplet $(m_1, \ldots, m_k)$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, $R(m_1, \ldots, m_k)$ existe.
Lorsque $k = 1$, on a $R(k)$ d'après la question 9.
Supposons maintenant que $k \geq 2$ et que $R(k-1)$ est vraie.
On procède à nouveau par récurrence en notant, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $S(s)$ l'assertion suivante : Pour tout $(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^k$ tel que $s = \sum_{i=1}^{k} m_i$,
$R(m_1, \ldots, m_k)$ existe.

$\diamond$ *Initialisation :* Supposons que $s < 3k$.

Soit $(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^k$ tel que $s = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $m_i \geq 3$, alors $s \geq 3k$, ce qui est faux, donc il existe $i \in \mathbb{N}_k$ tel que $m_i = 2$. Alors, d'après la question 14 et d'après $R(k-1)$, $R(m_1, \ldots, m_k)$ existe. Ceci prouve $S(s)$.

$\diamond$ *Hérédité :* Supposons que $s \geq 3k$ et que $S(s-1)$ est vraie.

Soit $(m_1, \ldots, m_k) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^k$ tel que $s = \sum_{i=1}^{k} m_i$.

À nouveau, si l'un des m_i est égal à 2, la question 14 et l'hypothèse $R(k-1)$ montrent que $R(m_1, \ldots, m_k)$ existe.

Sinon, on est sous les hypothèses de la question précédente car les k-uplets $(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \ldots, m_k)$ ont une somme égale à $s-1$. Alors, d'après la question précédente, $R(m_1, \ldots, m_k)$ existe.

Ceci démontre $S(s)$.

Le principe de récurrence permet de conclure que $S(s)$ est vraie pour tout $s \in \mathbb{N}$, donc $R(k)$ est vraie, en supposant $R(k-1)$.

À nouveau, le principe de récurrence montre que $R(k)$ est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, ce qu'il fallait démontrer.

17°) Pour $k = 2$, l'inégalité de la question 15 devient :

$R(m_1, m_2) \leq R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1)$, pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $m_1 + m_2 = n$, $R(m_1, m_2) \leq \binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1}$.

Supposons d'abord que $n = 4$. Soit $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $m_1 + m_2 = 4$. Alors $m_1 = m_2 = 2$. D'après la question 14 puis la question 9, $R(2, 2) = R(2) = 2$, or $\binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1} = \binom{2}{1} = 2$, donc $R(4)$ est vraie.

Supposons que $n \geq 4$ et que $R(n)$ est vraie.

Soit $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $m_1 + m_2 = n + 1$. Alors d'après $R(n)$,

$$\begin{aligned} R(m_1, m_2) &\leq R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1) \\ &\leq \binom{(m_1 - 1) + m_2 - 2}{(m_1 - 1) - 1} + \binom{m_1 + (m_2 - 1) - 2}{m_1 - 1}, \end{aligned}$$

donc d'après la relation de Pascal, $R(m_1, m_2) \leq \binom{m_1 + m_2 - 2}{m_1 - 1}$,

ce qui prouve $R(n+1)$.