

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 11 : du lundi 15 décembre au vendredi 19.

Liste des questions de cours

- 1°) Si $(G, .)$ est un groupe et A un ensemble quelconque, montrer qu'on peut définir une structure de groupe sur G^A .
- 2°) Si E est un ensemble quelconque, montrer qu'on peut définir une structure de groupe sur l'ensemble des bijections de E dans E .
- 3°) Que peut-on dire d'une intersection de sous-groupes ? Démontrez-le.
- 4°) Lorsque A est une partie d'un groupe $(G, .)$, quels sont les éléments de $Gr(A)$? Démontrez-le.
- 5°) Dans un groupe $(G, .)$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
— i) $Gr(a)$ est cyclique de cardinal n .
— ii) $\{k \in \mathbb{N}^* / a^k = 1\}$ est non vide et son minimum est égal à n .
— iii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $[a^k = 1 \iff k \in n\mathbb{Z}]$.
— iv) Les éléments de $Gr(a)$ sont exactement $1, a, \dots, a^{n-1}$ et ils sont deux à deux distincts.
- 6°) Montrer que l'image directe (resp : réciproque) d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe.
- 7°) Montrer qu'un groupe est monogène non cyclique si et seulement si il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.
- 8°) Énoncer et démontrer le théorème de Lagrange.
- 9°) Avec $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, ou sur un autre exemple, décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints. Déterminer l'ordre de σ .
- 10°) Montrer par récurrence sur n que toute permutation de \mathcal{S}_n se décompose en un produit de transpositions.
- 11°) Lorsque $n \geq 2$, montrer que le cardinal de \mathcal{A}_n est égal à $\frac{n!}{2}$, où \mathcal{A}_n désigne l'ensemble des permutations paires de \mathcal{S}_n .

Le thème de la semaine : les groupes.

Le cours portant sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est connu des étudiants mais nous n'avons fait pour le moment aucun exercice à ce sujet. Cette notion fera partie du prochain programme de colles.

Les notions de sous-groupes distingués et de groupes quotients ont été évoquées, mais aucune connaissance à ce sujet n'est attendue des étudiants.

1 Définition d'un groupe

Notations multiplicative et additive.

Les éléments d'un groupe sont réguliers (ou simplifiables) à gauche et à droite.

Ordre d'un groupe fini.

2 Construction de groupes

Groupe produit $G_1 \times \cdots \times G_n$.

Groupe G^A des fonctions à valeurs dans un groupe G .

Groupe symétrique d'un ensemble.

3 Sous-groupes

Caractérisation d'un sous-groupe.

Une intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Groupe engendré par une partie A , noté $Gr(A)$.

Propriété. Si $A \subset B$, alors $Gr(A) \subset Gr(B)$.

Propriété. Soit $(G, .)$ un groupe et $A \subset G$. $Gr(A) = \left\{ \prod_{i=1}^n a_i / n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in A \cup A^{-1} \right\}$.

Partie génératrice d'un groupe.

4 Puissances d'un élément d'un groupe

Définition de a^n où a est un élément d'un groupe $(G, .)$ et où $n \in \mathbb{Z}$.

Propriété. Si $(G, +)$ est un groupe abélien et A une partie de G ,

$Gr(A) = \left\{ \sum_{a \in A} n_a . a / (n_a)_{a \in A} \in \mathbb{Z}^{(A)} \right\}$ où $\mathbb{Z}^{(A)}$ désigne l'ensemble des familles presque nulles d'entiers.

5 Groupe monogène

En notation multiplicative, $Gr(a) = \{a^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

En notation additive, $Gr(a) = \mathbb{Z}.a$.

Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Groupe monogène, groupe cyclique, ordre d'un élément.

Caractérisation des groupes cycliques : Soit $(G, .)$ un groupe, $a \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $Gr(a)$ est cyclique de cardinal n .
- ii) $\{k \in \mathbb{N}^* / a^k = 1\}$ est non vide et son minimum est égal à n .
- iii) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $[a^k = 1 \iff k \in n\mathbb{Z}]$.
- iv) Les éléments de $Gr(a)$ sont exactement $1, a, \dots, a^{n-1}$ et ils sont deux à deux distincts.

6 Morphismes de groupes

homomorphisme, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.

Le morphisme $n \mapsto a^n$ de \mathbb{Z} dans (G, \cdot) .

Si f est un morphisme,

$$f(1) = 1, f(x)^{-1} = f(x^{-1}), f\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n f(x_i), f(a^n) = f(a)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Traduction en notation additive.

Composée de morphismes, isomorphisme réciproque.

Le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G .

Propriété. Soient G et H deux groupes, G' un sous-groupe de G et H' un sous-groupe de H . Soit f un morphisme de G dans H .

Alors $f(G')$ est un sous-groupe de H et $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

Noyau et image d'un morphisme. CNS d'injectivité.

Propriété. Un groupe est monogène non cyclique si et seulement si il est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.

7 Le théorème de Lagrange

Si H est un sous-groupe de (G, \cdot) , les classes à gauche de H partitionnent G .

Théorème de Lagrange.

Dans un groupe G fini, $\forall a \in G, a^{|G|} = 1_G$.

8 Le Groupe symétrique

Groupe symétrique de degré n , noté \mathcal{S}_n .

Cycles : définition, longueur et support d'un cycle.

Deux cycles dont les supports sont disjoints commutent toujours entre eux.

Les transpositions.

Toute permutation de \mathcal{S}_n se décompose de manière unique en un produit (commutatif) de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints.

Toute permutation σ de \mathcal{S}_n se décompose en un produit de transpositions.

Dans une telle décomposition, la parité du nombre de transpositions ne dépend que de σ . On la note $\varepsilon(\sigma)$, c'est la signature de σ .

La signature est l'unique morphisme de \mathcal{S}_n dans $(\{-1, 1\}, \times)$ qui envoie toute transposition sur -1 .

Le groupe alterné de degré n est l'ensemble \mathcal{A}_n des permutations paires. C'est $\text{Ker}(\varepsilon)$.

Son cardinal vaut $\frac{n!}{2}$ lorsque $n \geq 2$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Anneaux, idéaux, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractéristique d'un anneau.