DM 23
Groupes abéliens de types finis

Notation.

- Si E est un ensemble fini, on note $|E|$ son cardinal.
- Lorsque $(G, +)$ est un groupe abélien, on note 0 son élément neutre.
- Lorsque A est une partie d'un groupe G,
  on note $\mathrm{Gr}(A)$ le groupe engendré par A.
  Si $x \in G$, on note $\mathrm{Gr}(x) = \mathrm{Gr}(\{x\})$.

Partie I : Groupes quotients

Soit $(G, +)$ un groupe abélien et H un sous-groupe de G.
On définit sur G la relation binaire R_H par : $\forall x, y \in G, \ \ xR_Hy \iff y - x \in H$.

1°) Montrer que R_H est une relation d'équivalence.
Soit $a \in G$. Déterminer la classe d'équivalence de a, que l'on notera $\overline{a}$.

On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence et pour tout $a, b \in G$, on convient que $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$.

2°) Montrer que cette dernière égalité structure G/H comme un groupe abélien.
Montrer que, pour tout $a \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$, $n\overline{a} = \overline{na}$.
Quels sont les groupes de la forme $\mathbb{Z}/H$?

3°) Lorsque G est de cardinal fini, montrer que $|G| = |H| \times |G/H|$.

Partie II : Quelques définitions

Soit $(G, +)$ un groupe abélien.

- On dit que G est de type fini si et seulement si il existe une partie finie A de G telle que G est le groupe engendré par A.
- On dit que G est sans torsion si et seulement si, pour tout $x \in G \setminus \{0\}$, x est d'ordre infini.
- On dit que G est de torsion si et seulement si, pour tout $x \in G$, x est d'ordre fini.

4°) Si G et H sont deux groupes de types finis, montrer que $G \times H$ est de type fini. En déduire que, pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(d_i)_{1 \leq i \leq \ell} \in {\mathbb{N}^*}^{\ell}$,
$\mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$ est un groupe abélien de type fini.

5°) Pour chacun des groupes suivants, indiquer s'il est de torsion et s'il est sans torsion : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

6°) Montrer que G est de type fini et de torsion si et seulement si G est de cardinal fini.

Partie III : Groupes abéliens finis

Dans cette partie, on suppose que $(G, +)$ est un groupe abélien de cardinal fini.
Pour tout $x \in G$, on note $o(x)$ l'ordre de x.

7°) Soit $x, y \in G$ tels que $o(x)$ et $o(y)$ sont premiers entre eux.
Montrer que $o(x + y) = o(x)o(y)$.

8°) Soit $x, y \in G$. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que $o(z)$ est égal au plus petit commun multiple de $o(x)$ et de $o(y)$.

9°) Montrer qu'il existe $x_0 \in G$ tel que l'ordre de x_0 est maximal parmi les ordres des éléments de G et montrer que, pour tout $x \in G$, l'ordre de x divise l'ordre de x_0.

10°) On admet temporairement le résultat suivant : pour tout groupe $(G', +)$ abélien et fini, si x'_0 est un élément de G' d'ordre maximal, alors G' est isomorphe à $H' \times (G'/H')$, où H' est le groupe engendré par x'_0.
Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$ tels que

- Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$, d_{i+1} divise d_i ;
- G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z})$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que x_0 est un élément de G d'ordre maximal et on pose $H = \mathrm{Gr}(x_0)$.

11°) Notons A l'ensemble des couples (K, f), où K est un sous-groupe de G et où f est un morphisme de K dans H.
Si $(K, f), (K', f') \in A$, on convient que $(K, f) \preceq (K', f')$ si et seulement si $K \subset K'$ et $f'|_K = f$. Montrer que la relation binaire "$\preceq$" est une relation d'ordre sur A.
Pour cette relation d'ordre, montrer que $\{(K, f) \in A \ / \ H \subset K \text{ et } f|_H = Id_H\}$ possède un élément maximal.

On note maintenant (K, f) cet élément maximal.
Afin de montrer que $K = G$, on raisonne par l'absurde : on suppose que K est strictement inclus dans G. On choisit un élément y_0 dans $G \setminus K$ et on note K' le groupe engendré par $K \cup \{y_0\}$.

12°) Construire un morphisme injectif g de H dans $\mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$.
Prolonger $g \circ f$ en un morphisme de K' dans $\mathbb{U}$.
En déduire une contradiction.

13°) Montrer la propriété admise au début de la question 10.

Partie IV : Sommes directes

Lorsque H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un groupe abélien $(G, +)$,
on note $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \ / \ h_1 \in H_1 \text{ et } h_2 \in H_2\}$.
On dit que la somme $H_1 + H_2$ est directe si et seulement si, pour tout $x \in H_1 + H_2$, il existe un unique couple $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ tel que $x = h_1 + h_2$.
Dans ce cas, et uniquement dans ce cas, la somme $H_1 + H_2$ est notée $H_1 \oplus H_2$.

14°) **a)** Lorsque $G = \mathbb{Z}^2$, $H_1 = \mathrm{Gr}((2,1))$ et $H_2 = \mathrm{Gr}((0,2))$,
la somme $H_1 + H_2$ est-elle directe ?

b) Lorsque $G = \mathbb{Z}$, $H_1 = a\mathbb{Z}$ et $H_2 = b\mathbb{Z}$ où $a, b \in \mathbb{N}$,
la somme $H_1 + H_2$ est-elle directe ?

15°) Soit H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe abélien $(G, +)$.
a) Montrer que $H_1 + H_2 = \mathrm{Gr}(H_1 \cup H_2)$.
b) Lorsque la somme est directe, montrer que $H_1 \oplus H_2$ est isomorphe à $H_1 \times H_2$.

16°) Montrer que si H_1, H_2 et H_3 sont des sous-groupes d'un groupe abélien $(G, +)$, alors $(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + (H_2 + H_3)$.
Si l'on suppose que $H_1 \oplus H_2$ est directe, ainsi que $(H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$, montrer que $H_2 + H_3$ est une somme directe, ainsi que la somme $H_1 + (H_2 \oplus H_3)$.

On peut donc écrire $H_1 + H_2 + H_3$ au lieu de $(H_1 + H_2) + H_3$
et $H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ au lieu de $(H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$.
Plus généralement, lorsque $H_1, \ldots, H_n$ sont n sous-groupes d'un groupe abélien $(G, +)$, on admettra que les quantités $H_1 + \cdots + H_n$ et $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ ne dépendent pas de la façon dont elles sont parenthésées.

Partie V : Groupes abéliens de rangs finis

Lorsque I est un ensemble quelconque, $\mathbb{Z}^{(I)}$ désigne l'ensemble des familles $(n_i)_{i \in I}$ d'entiers relatifs tels que $\{i \in I \ / \ n_i \neq 0\}$ est fini.

Dans cette partie, on fixe un groupe abélien $(G, +)$.
Soit $B = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G, où I est un ensemble quelconque.
On dit que B est une base de G si et seulement si pour tout $x \in G$, il existe une unique famille $(n_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^{(I)}$ telle que $x = \sum_{i \in I} n_i x_i$.

17°) S'il existe une base de G, montrer que G est sans torsion.

On dit que G est de rang fini si et seulement si il possède une base de cardinal fini.

18°) Dans cette question, on suppose que G est de rang fini.
On note $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de G de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que si $(e_i)_{i \in I}$ est une autre base de G, alors I est de cardinal fini.

b) On note $H = \{2x \ /x \in G\}$.

Montrer que H est un sous-groupe de G tel que G/H est de cardinal 2^n.
En déduire que toutes les bases de G sont de cardinal n.

Ainsi, lorsque G est un groupe de rang fini, toutes ses bases ont le même cardinal, que l'on appelle le rang de G.

19°) Dans cette question, on suppose que G est un groupe sans torsion de type fini. Afin de montrer que G est de rang fini, on raisonne par l'absurde en supposant que G ne possède aucune base de cardinal fini.

a) Pour toute partie génératrice finie X de G, montrer qu'on peut définir

$$m_X = \min\left(\left\{ \sum_{x\in X} |n_x| \ / \ (n_x)_{x\in X} \in \mathbb{Z}^X \setminus \{0\} \text{ et } \sum_{x\in X} n_x x = 0\right\}\right).$$

b) On note n le cardinal minimal des parties finies génératrices de G. Montrer que n est bien défini et qu'il existe une partie X_0 génératrice de G de cardinal n telle que, pour toute autre partie génératrice X de cardinal n, $m_{X_0} \leq m_X$.
Il existe alors une famille $(n_x)_{x\in X_0} \in \mathbb{Z}^{X_0}\setminus\{0\}$ telle que $m_{X_0} = \displaystyle\sum_{x\in X_0} |n_x|$ et $\displaystyle\sum_{x\in X_0} n_x x = 0$.

c) Montrer que, pour tout $x \in X_0$, $|n_x| \neq 1$.

d) Montrer qu'il existe $x, y \in X_0$ tels que $0 < |n_x| < |n_y|$ et $|n_x|$ ne divise pas $|n_y|$.

e) En effectuant la division euclidienne de $|n_y|$ par $|n_x|$, construire une partie génératrice de G contredisant la minimalité de m_{X_0}.

20°) En déduire que G est un groupe sans torsion de type fini si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et que dans ce cas, n est unique.

Partie VI : Théorème de structure des groupes de types finis

On fixe dans cette partie un groupe abélien $(G, +)$ de type fini.
On note $T(G)$ l'ensemble des éléments de G dont l'ordre est fini.

21°) Montrer que $T(G)$ est un sous-groupe de G.

22°) Montrer que $G/T(G)$ est un groupe sans torsion de type fini.

23°) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{N}^*$,
vérifiant que pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$, $d_{i+1} \mid d_i$, tels que

$$G \text{ est isomorphe à } \mathbb{Z}^k \times (\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}/d_\ell\mathbb{Z}).$$