

# DM 25

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni le jeudi 1er janvier.

## Produit semi-direct de groupes

### Partie I : Automorphismes de groupes

1°) Lorsque  $H$  est un groupe, on note  $\text{Aut}(H)$  l'ensemble des automorphismes de  $H$ . Montrer que  $\text{Aut}(H)$  est un groupe pour la loi de composition.

2°) Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$  et  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . À quelle condition sur  $x$  l'application  $y \mapsto xy$  est-elle un automorphisme du groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ?

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ .

Montrer que  $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  est isomorphe au groupe des inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

### Partie II : produit semi-direct

Dans cette partie,  $H$  et  $K$  désignent deux groupes notés multiplicativement et  $\varphi$  est un morphisme du groupe  $K$  vers le groupe  $\text{Aut}(H)$ . Ainsi, lorsque  $k \in K$  et  $h \in H$ ,  $\varphi(k)(h)$  représente l'image de  $h$  par l'automorphisme  $\varphi(k)$ .

4°) Pour tout  $(h, k) \in H \times K$  et  $(h', k') \in H \times K$ , on pose  $(h, k).(h', k') = (h \varphi(k)(h'), kk')$ . Montrer que cette égalité définit une loi de groupe sur l'ensemble  $H \times K$ .

Ce groupe est appelé le produit semi-direct de  $H$  par  $K$  relativement à  $\varphi$  et il est noté  $H \rtimes_{\varphi} K$ .

5°) Montrer que  $H \rtimes_{\varphi} K$  est commutatif si et seulement si  $H$  et  $K$  sont abéliens et si  $\varphi$  est l'application  $k \mapsto \text{Id}_H$ .

6°) En utilisant les questions précédentes, construire un groupe non commutatif d'ordre 21.

7°) Si  $R$  est un sous-groupe d'un groupe  $G$ , noté multiplicativement, on dit que  $R$  est un sous-groupe distingué de  $G$  si et seulement si, pour tout  $g \in G$  et  $r \in R$ ,  $grg^{-1} \in R$ . Si  $G$  est un groupe noté multiplicativement, on note  $1_G$  son élément neutre.

On note  $E = H \times \{1_K\}$  et  $F = \{1_H\} \times K$  et on pose  $E.F = \{e.f / e \in E, f \in F\}$ . Montrer que

- $E \cap F = \{1_{H \rtimes_{\varphi} K}\}$ ;
- $E.F = H \rtimes_{\varphi} K$ ;
- $F$  est un sous-groupe de  $H \rtimes_{\varphi} K$  isomorphe à  $K$ ;
- $E$  est un sous-groupe distingué de  $H \rtimes_{\varphi} K$  isomorphe à  $H$ .

### Partie III : construction réciproque

8°) Soit  $G$  un groupe, toujours noté multiplicativement. On suppose qu'il existe un sous-groupe distingué de  $G$ , noté  $E$ , et un sous-groupe de  $G$  noté  $F$ , tels que  $E \cap F = \{1_G\}$  et  $E.F = G$ .

Montrer que l'application  $p$ , de  $E \times F$  dans  $G$ , définie par  $p(e, f) = ef$  est une bijection. Montrer qu'il existe un morphisme  $\varphi$  de  $F$  dans  $\text{Aut}(E)$  tel que  $G$  est isomorphe à  $E \rtimes_{\varphi} F$ .

9°) Soit  $H, H', K$  et  $K'$  4 groupes notés multiplicativement.

On suppose que  $H'$  est isomorphe à  $H$  et que  $K'$  est isomorphe à  $K$ .

Si  $\varphi$  est un morphisme de  $K$  dans  $\text{Aut}(H)$ , montrer qu'il existe un morphisme  $\varphi'$  de  $K'$  dans  $\text{Aut}(H')$  tel que  $H \rtimes_{\varphi} K$  est isomorphe à  $H' \rtimes_{\varphi'} K'$ .

10°) Soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ . On note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$  et on appelle  $D_n$  l'ensemble des similitudes  $s$  telles que  $s(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n$ .

- a) Montrer que  $D_n$  est un groupe (que l'on appelle le groupe diédral d'ordre  $2n$ ).
- b) Montrer que si  $s \in D_n$ , alors  $s(0) = 0$ .
- c) Déterminer les éléments de  $D_n$ .
- d) Montrer que  $D_n$  est isomorphe à un produit semi-direct de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .