

DM 26 :

Résidus quadratiques

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni le jeudi 8 janvier.

Dans tout le problème, p désigne un nombre premier impair.

◊ Pour $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a , on dit que a est un résidu quadratique modulo p (en abrégé : RQ mod p) si et seulement si il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$.

Dans le cas contraire, on dit que a est non-résidu quadratique modulo p (en abrégé : NRQ mod p).

◊ Pour $\alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on dit que α est un résidu quadratique dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $\xi \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que $\xi^2 = \alpha$.

Partie I :

1°) a) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a . Montrer que l'équation $\xi^2 = \bar{a}$, d'inconnue $\xi \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, n'admet aucune solution ou bien en admet exactement deux.

b) En déduire qu'il y a dans $\{1, \dots, p-1\}$ exactement $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques modulo p , et $\frac{p-1}{2}$ non-résidus quadratiques modulo p .

c) Déterminer les RQ et les NRQ modulo 11 compris entre 1 et 10.

Pour $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a , on définit le symbole de Legendre :

$$\left(\frac{a}{p} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est RQ mod } p \\ -1 & \text{si } a \text{ est NRQ mod } p \end{cases}.$$

d) α) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a , montrer que $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{ka}{p} \right) = 0$.
 β)

1. Soit $k \in \{1, \dots, p-2\}$ et $k' \in \{1, \dots, p-1\}$ tels que $kk' \equiv 1 \pmod{p}$.

Montrer que $k' \neq p-1$ et que $\left(\frac{k(k+1)}{p} \right) = \left(\frac{k'+1}{p} \right)$.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{k(k+1)}{p} \right) = -1$.

2°) a) Théorème d'Euler.

$\alpha)$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas x , $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

$\beta)$ Lorsque $\left(\frac{a}{p} \right) = -1$, en utilisant l'application $\xi \mapsto \xi^{-1}\bar{a}$ sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, montrer que $\overline{(p-1)!} = \bar{a}^{\frac{p-1}{2}}$.

$\delta)$ Montrer le théorème de Wilson, selon lequel $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

$\gamma)$ Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ tel que p ne divise pas a , $\left(\frac{a}{p} \right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$.

Montrer que $\left(\frac{10}{31} \right) = 1$.

b) En déduire que $\left(\frac{-1}{p} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$.

c) $\alpha)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \equiv 3 \pmod{4}$. Démontrer qu'il existe au moins un diviseur premier q de n tel que $q \equiv 3 \pmod{4}$.

$\beta)$ En déduire que l'équation $x^2 + y^3 - 8(2z+1)^3 + 1 = 0$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ n'a pas de solution. *Indications :* en supposant que l'équation admet une solution (x, y, z) , on pourra commencer par montrer que y est impair, puis que $x^2 + 1 = (2(2z+1) - y)A$, où $A \equiv 3 \pmod{4}$.

En déduire qu'en particulier, l'équation de Lebesgue $x^2 + y^3 = 7$ n'a pas de solution dans \mathbb{Z}^2 .

3°) a) Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que p ne divise ni a ni b . Montrer :

$$1. \quad \left(\frac{1}{p} \right) = 1;$$

$$2. \quad a \equiv b \pmod{p} \implies \left(\frac{a}{p} \right) = \left(\frac{b}{p} \right);$$

$$3. \quad \left(\frac{a^2}{p} \right) = 1;$$

$$4. \quad \left(\frac{a}{p} \right) \times \left(\frac{b}{p} \right) = \left(\frac{ab}{p} \right).$$

b) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ tel que p ne divise pas a . On note $a = \prod_{i=1}^N p_i^{r_i}$ la décomposition primaire de a et $I = \{i \in \{1, \dots, N\} / r_i \text{ impair}\}$. On pose $a' = \prod_{i \in I} p_i$.

Montrer que $\left(\frac{a}{p} \right) = \left(\frac{a'}{p} \right)$.

4°) Lemme de Gauss :

Soit $a \in \mathbb{Z}$ tels que p ne divise pas a . Pour tout $j \in \{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$, on note r_j le reste de la division euclidienne de ja par p .

a) Montrer que $r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ sont deux à deux distincts.

On note u_1, \dots, u_s les éléments de $\{r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}\}$ qui sont inférieurs ou égaux à $\frac{p-1}{2}$, et v_1, \dots, v_t les éléments de $\{r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}\}$ qui sont supérieurs ou égaux à $\frac{p+1}{2}$.

b) Etablir :

1. $u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_t$ sont deux à deux distincts et forment $\{r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}\}$.
2. $u_1, \dots, u_s, p - v_1, \dots, p - v_t$ sont deux à deux distincts et forment $\{1, \dots, \frac{p-1}{2}\}$.

c) En déduire que $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^t$: il s'agit du lemme de Gauss.

En déduire la valeur de $\left(\frac{8}{29}\right)$.

d) Montrer que $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$: on pourra montrer que $\frac{p-1}{2} - \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor \equiv \frac{p^2-1}{8}$ modulo 2.

Montrer que $\left(\frac{8}{31}\right) = 1$.

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $8n + 7$ est premier, alors $8n + 7 \mid 2^{4n+3} - 1$ et que, si $n \geq 1$, $2^{4n+3} - 1$ est composé.

Partie II : loi de réciprocité quadratique de Gauss

1°) Soit p, q deux nombres premiers impairs distincts.

Dans le plan usuel, on note $A(\frac{p}{2}, 0), B(0, \frac{q}{2}), C(\frac{p}{2}, \frac{q}{2})$.

a) Montrer que le nombre de points de $(\mathbb{N}^*)^2$ situés strictement dans le rectangle $OACB$ est égal à $\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}$.

b) Etablir qu'il n'y a aucun point de $(\mathbb{N}^*)^2$ sur le segment $[O, C]$.

c) Montrer que le nombre de points de $(\mathbb{N}^*)^2$ situés dans le triangle OAC est $\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor$,

et que le nombre de points de $(\mathbb{N}^*)^2$ situés dans le triangle BOC est $\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left\lfloor \frac{kp}{q} \right\rfloor$.

d) On reprend les notations du lemme de Gauss (question I.4) en remplaçant a par q .

On pose $u = \sum_{i=1}^s u_i$ et $v = \sum_{k=1}^t v_k$.

Montrer que $t \equiv (u+v) + (u+pt-v)$ modulo 2. En déduire que $t \equiv \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} r_j + \frac{p^2-1}{8}$ modulo 2.

Montrer que $t \equiv \sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left\lfloor \frac{jq}{p} \right\rfloor$ modulo 2.

e) En déduire que $\left(\frac{p}{q}\right) \times \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$: il s'agit de la loi de réciprocité quadratique de Gauss.

2°) a) Déduire de la loi de réciprocité quadratique que, pour tous nombres premiers

$$\text{impairs distincts } p \text{ et } q, \left(\frac{q}{p}\right) = \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right) & \text{si } (p \equiv 1 \pmod{4}) \vee (q \equiv 1 \pmod{4}) \\ -\left(\frac{p}{q}\right) & \text{si } (p \equiv 3 \pmod{4}) \wedge (q \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}.$$

b) Sachant que 6607 est premier, montrer que $\left(\frac{6417}{6607}\right) = 1$.

3°) Test de Pépin.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ (nombres de Fermat).

Démontrer que F_n est premier si et seulement si $3^{\frac{F_n-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_n}$: pour la réciproque on pourra faire intervenir un diviseur premier quelconque p de F_n et le plus petit entier $\alpha \geq 1$ tel que $3^\alpha \equiv 1 \pmod{p}$, et montrer que $\alpha \mid F_n - 1$ mais que α ne divise pas $\frac{F_n - 1}{2}$.

Par exemple, montrer que $F_5 = 2^{(2^5)} + 1$ est composé.

4°) On suppose que $p \geq 5$. Montrer :

a) $\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv \pm 1 \pmod{12} \\ -1 & \text{si } p \equiv \pm 5 \pmod{12} \end{cases}$;

b) $\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{6} \\ -1 & \text{si } p \equiv -1 \pmod{6} \end{cases}$.