Résumé de cours :
Semaine 14, du 15 décembre au 19

Les anneaux (fin)

1 Caractéristique d'un anneau (fin)

Propriété. Soit A un anneau commutatif tel que $\mathrm{car}(A) = p \in \mathbb{P}$. alors $x \longmapsto x^p$ est un endomorphisme sur A, dit de Frobenius.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La caractéristique d'un corps est ou bien nulle, ou bien un nombre premier.

Propriété. On appelle sous-corps premier d'un corps $\mathbb{K}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$.
- Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$, le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Z}.1_{\mathbb{K}}$, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est $\{(p.1_{\mathbb{K}})(q.1_{\mathbb{K}})^{-1} \ / \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$. Il est isomorphe à $\mathbb{Q}$. En particulier, $\mathbb{K}$ est de cardinal infini.

Propriété. Si $\mathbb{K}$ est un corps fini de caractéristique p, l'endomorphisme de Frobenius $x \longmapsto x^p$ sur $\mathbb{K}$ est un automorphisme de corps. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$, c'est l'identité.

Les espaces vectoriels (début)

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

Notation. Symbole de Kronecker : $\delta_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ lorsque $i = j$.

2 La structure algébrique d'espace vectoriel

2.1 Définition et exemples

Définition.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où $(E, +)$ est un groupe abélien et "." est une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$ tel que, pour tout $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
- $\alpha.(x + y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$,
- $(\alpha + \beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$,
- $(\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$,
- $1_{\mathbb{K}}.x = x$.

Remarque. Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ses éléments seront appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires.

Exemples.

⋄ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque. Alors l'ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E indexées par I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.(x_i)_{i\in I} = (\alpha.x_i)_{i\in I}$.
De même, l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des applications de I dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(I, E)$ et $\alpha \in K$, pour tout $x \in I$,
$(f + g)(x) \stackrel{\Delta}{=} f(x) + g(x)$ et $(\alpha.f)(x) \stackrel{\Delta}{=} a.(f(x))$.

⋄ En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⋄ Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.

⋄ L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

⋄ $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
- $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ et $\lambda.0_E = 0_E$;
- $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$;
- $(\lambda - \mu)x = \lambda.x - \mu.x$;
- $\lambda x = 0 \iff (\lambda = 0) \vee (x = 0)$;
- $(\lambda x = \lambda y) \wedge (\lambda \neq 0) \Longrightarrow x = y$;
- $(\lambda x = \mu x) \wedge (x \neq 0) \Longrightarrow \lambda = \mu$.

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $((E_i, +, .))_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On structure $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ en un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en convenant que
- $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ \ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in E,\ \ x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
- $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ \ \alpha.x = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n)$.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Propriété et définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.
F est un ***sous-espace vectoriel*** de E si et seulement si
- $F \neq \emptyset$;
- $\forall (x, y) \in F^2\ ,\ x + y \in F$ (stabilité de la somme de deux vecteurs) ;
- $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times F\ ,\ \alpha.x \in F$ (stabilité du produit externe).

Cet ensemble de conditions est équivalent à
- $F \neq \emptyset$;
- $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times F \times F\ ,\ \alpha.x + y \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).

Exemples.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $\left\{(x_i)_{1\leq i\leq n}\ /\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble $C^p([0, 1], \mathbb{C})$ des applications de classe C^p de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, où $p \in \mathbb{N}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{C})$.
- L'ensemble $l^1(\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\ /\ \sum a_n \text{ ACV}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
  Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E^I. On dit que c'est une famille presque nulle si et seulement si $\{i \in I / x_i \neq 0\}$ est un ensemble fini. On note $E^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de E^I. $E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I.

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Propriété. Une intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A. Alors $\bigcap_{F \in \mathcal{S}} F$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A et, par construction, c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. On le note $\text{Vect}(A)$.

Exemple. $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$, puisque $\{0\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\text{Vect}(F) = F$.

Propriété. Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A : $\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. Si $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, on note $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \text{Vect}(\{x_i \ / \ i \in I\})$.

En particulier, $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ / \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$.

Si $u \in E \setminus \{0\}$, $\text{Vect}(u) = \{\alpha u / \alpha \in \mathbb{K}\}$ est appelé la droite vectorielle engendrée par le vecteur u.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \subset E$. Si $x \in \text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A)$.
Si $x = \lambda y + a$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in \text{Vect}(A)$, alors $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\})$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :
- échanger x_{i_0} et x_{i_1}, où $i_0, i_1 \in I$ avec $i_0 \neq i_1$;
- multiplier x_{i_0} par $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$;
- ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E.

$E_1 + \cdots + E_p \triangleq \text{Vect}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\Big)$. Cette somme est également notée $\sum_{i=1}^{p} E_i$.

On vérifie que $E_1 + \cdots + E_p = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, p\}, \ \ x_i \in E_i \Big\}$.

Définition. Ainsi, avec les notations précédentes, lorsque $x \in E$,

$x \in \sum_{i=1}^{p} E_i \Longleftrightarrow \exists (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \ \ x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$

On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si

$x \in \sum_{i=1}^{p} E_i \Longleftrightarrow \exists \, ! \ (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \ \ x = \sum_{i=1}^{p} x_i.$

Dans ce cas, la somme est notée $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

La somme est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,

$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p,\ \ x_i = 0.$

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors $F + G$ est une somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

2.4 Les applications linéaires

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une application linéaire (on dit aussi un morphisme ou un homomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si et seulement si $\forall(\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E\ \ f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.
Un ***isomorphisme*** est un morphisme bijectif.
Un ***endomorphisme*** est un morphisme de E dans lui-même.
Un ***automorphisme*** est un endomorphisme bijectif.
Une ***forme linéaire*** est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemples.

— $\begin{array}{rcl} C([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_{-1}^{1} f(t)t^2\ dt \end{array}$ est une forme linéaire.

— $\begin{array}{rcl} D^2([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$ est linéaire.

— $\begin{array}{rcl} l^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Définition. Les homothéties (vectorielles) de E sont les applications de la forme $\lambda.Id_E$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Notation.

— On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

— On pose $L(E) \triangleq L(E, E)$.

— On pose $L(E, \mathbb{K}) = E^*$; c'est l'ensemble des formes linéaires, appelé le dual de E.

Propriété. Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont exactement les $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_i)_{1\le i\le n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \end{array}$
où $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $u \in L(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, $\forall(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\ \ u\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Propriété. Soit $u \in L(E, F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. Alors $u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big) = \mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, f^{-1} est encore un isomorphisme.

Propriété. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est ***stable*** par u, ou que u ***stabilise*** F si et seulement si $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, l'***endomorphisme induit*** par u sur F est $\begin{array}{cccc} v: & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$. C'est un élément de $L(F)$, que par abus, on note souvent $u|_F$ et que l'on appelle la restriction de u à F.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Soit f un morphisme de E dans F.
Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit f une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.
Alors f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$ et
f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u, v) \in L(E)^2$.
Si u et v commutent, alors $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont stables par v.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $u, v \in L(E)$. Alors $uv = 0 \iff Im(v) \subset Ker(u)$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Soit $y \in F$.
L'équation (E) : $f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$ est appelée une équation linéaire.

Propriété. Avec les notations précédentes, l'équation sans second membre associée à (E) est l'équation (H) : $f(x) = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H = \mathrm{Ker}(f)$: notamment l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'équation (E) est compatible, c'est-à-dire qu'elle possède au moins une solution $x_0 \in E$, si et seulement si $y \in \mathrm{Im}(f)$. Dans ce cas, $\mathcal{S}_E = x_0 + \mathcal{S}_H$: la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

3 Espaces affines

Définition. On appelle $\mathbb{K}$-***espace affine*** tout triplet $(\mathcal{E}, E, +_{\mathcal{E}})$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (dont la loi additive sera notée $+_E$) et où $+_{\mathcal{E}}$ est une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ (M, x) & \longmapsto & M +_{\mathcal{E}} x \end{array}$ telle que
i) Pour tout $M \in \mathcal{E}$, l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & M +_{\mathcal{E}} x \end{array}$ est une bijection.
ii) $\forall (M, x, y) \in \mathcal{E} \times E \times E \ \ (M +_{\mathcal{E}} x) +_{\mathcal{E}} y = M +_{\mathcal{E}} (x +_E y)$.
Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des ***points*** et E est appelé la ***direction*** de $\mathcal{E}$.

Notation. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $(A, B) \in \mathcal{E}^2$.
D'après i), il existe un unique vecteur x tel que $A +_{\mathcal{E}} x = B$. On note $x = \overrightarrow{AB}$ ou encore $x = B -_{\mathcal{E}} A$.

Remarque. On peut établir que les règles de calcul relatives aux opérations "$+_{\mathcal{E}}$" (point$+_{\mathcal{E}}$vecteur) et "$-_{\mathcal{E}}$" (point$-_{\mathcal{E}}$point) sont formellement les mêmes que celles que vérifient l'addition et la soustraction sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la relation de ***Chasles*** s'écrit : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$.

Définition. Si A, B, C, D sont quatre points de $\mathcal{E}$, $ABCD$ est un ***parallélogramme*** ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Remarque. Dans les propriétés i) et ii) définissant un espace affine, lorsqu'un point M de $\mathcal{E}$ intervient, c'est toujours quantifié de la manière suivante : "$\forall M \in \mathcal{E} \ \ \ldots$". Ainsi, dans un espace affine, tous les points ont la même importance. C'est un espace homogène, contrairement aux espaces vectoriels.
Les propriétés qui suivent montrent que cette différence entre la notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et celle de $\mathbb{K}$-espace affine est la seule qui soit vraiment pertinente.

Propriété. Soient $(\mathcal{E}, E, +)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et A un point de $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel en convenant que, pour tout $(M, N, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathbb{K}$, $M + N = A + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$ et $\alpha.M = A + (\alpha.\overrightarrow{AM})$.

Remarque. Cette propriété montre que tout $\mathbb{K}$-espace affine est assimilable à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dès lors que l'on a choisi un point A, qui jouera le rôle de vecteur nul.

Propriété réciproque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le triplet $(E, E, +)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine, que l'on dit canoniquement associé à l'espace vectoriel E.

Convention. En accord avec le programme, les seuls espaces affines que nous utiliserons sont les espaces affines canoniquement associés à un espace vectoriel.

4 La structure d'algèbre

Définition. $(A, +, ., \star)$ est une $\mathbb{K}$-***algèbre*** si et seulement si $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(A, +, \star)$ est un anneau et si $\forall(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A \;\; \lambda.(a \star b) = (\lambda.a) \star b = a \star (\lambda.b)$.
On dit que A est commutative (ou abélienne) si et seulement si la loi $\star$ est commutative.
On dit que A est intègre si et seulement si l'anneau $(A, +, \star)$ est un anneau intègre.

Exemples. $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre.
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^I$ sont des algèbres.

Propriété. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Plus généralement, si E, F et G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $f, g \in L(F, G)$ et $h \in L(E, F)$, $(\alpha f + g) \circ h = \alpha f \circ h + g \circ h$ et
pour tout $f, g \in L(E, F)$ et $h \in L(F, G)$, $h \circ (\alpha f + g) = \alpha h \circ f + h \circ g$.

Propriété. Soit $(A, +, ., \star)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. B est une ***sous-algèbre*** de $(A, +, ., \star)$ si et seulement si $1_A \in B$ et pour tout $x, y \in B$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + y, x \star y, \lambda x \in B$.

Définition. Soient $(A+, ., \times)$ et $(B, +, ., \times)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Une application $f : A \longrightarrow B$ est un ***morphisme d'algèbres*** si et seulement si $f(1_A) = 1_B$ et pour tout $x, y \in A$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$, $f(\alpha.x) = \alpha.f(x)$.