Feuille d'exercices 11.
Corrigé de l'exercice 13.

Exercice 11.13 :

Notons $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i}$ la décomposition de n en produit de nombres premiers. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, $p_i \in \mathbb{P}$ et $v_i \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{v_i} - p_i^{v_i-1})$.

Supposons que $\varphi(n) \mid n$. Ainsi, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = d\varphi(n)$. Alors, en simplifiant par $\prod_{i=1}^{k} p_i^{v_i-1}$, on obtient que (1) : $\prod_{i=1}^{k} p_i = d \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)$.

Si $n = 1$, alors $\varphi(n) = 1$ et n convient.

Supposons maintenant que $n \geq 2$. Alors $k \geq 1$.

Si 2 ne divise pas n, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, p_i est impair, donc $\prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)$ est pair alors que $\prod_{i=1}^{k} p_i$ est impair. La relation (1) est alors fausse, donc n n'est pas solution.

Ainsi, 2 intervient dans la décomposition de n en produit de nombres premiers. Cette dernière peut donc s'écrire $n = 2^v \prod_{i=1}^{k-1} p_i^{v_i}$, où pour tout $i \in \mathbb{N}_{k-1}$, p_i est un nombre premier impair. (1) devient alors $2 \prod_{i=1}^{k-1} p_i = d \prod_{i=1}^{k-1} (p_i - 1)$.

Si $k \geq 3$, alors $d \prod_{i=1}^{k-1} (p_i - 1)$ est un multiple de 4, ce qui n'est pas le cas de $2 \prod_{i=1}^{k-1} p_i$, donc n n'est pas solution. Supposons maintenant que $k \leq 2$.

Si $k = 1$, alors $n = 2^v$ et $\varphi(n) = 2^{v-1}$ divise bien n.

Supposons enfin que $k = 2$. Alors $n = 2^v p_1^{k_1}$. Alors (1) devient : $2p_1 = d(p_1 - 1)$. Ainsi, $(p_1 - 1) \mid 2p_1$, or $p_1 - (p_1 - 1) = 1$, donc d'après l'identité de Bezout, $p_1 \wedge (p_1 - 1) = 1$. Alors, d'après le lemme de Gauss, $(p_1 - 1) \mid 2$, or $p_1 - 1 \geq 2$, donc $p_1 - 1 = 2$, puis $p_1 = 3$.

Alors $n = 2^v 3^{k_1}$ avec $k_1 \geq 1$. On vérifie dans ce cas que $\varphi(n) = 2^{v-1} 3^{k_1} (1 - \frac{1}{3}) = 2^v 3^{k_1 - 1}$ divise n.

En conclusion, n est un multiple de $\varphi(n)$ si et seulement si il est de la forme $2^v 3^w$ avec $v, w \in \mathbb{N}$ et $v \neq 0$ lorsque $w \geq 1$.