Feuille d'exercices 12.
Corrigé de l'exercice 22.

Exercice 12.22 :

• Supposons que v est surjective, que u est injective et que $F = Im(u) \oplus Ker(v)$.

[On peut raisonner de manière élémentaire de la façon suivante.
Soit $x \in E$ tel que $w(x) = 0$. $v(u(x)) = 0$, donc $u(x) \in Ker(v) \cap Im(u) = \{0\}$. Ainsi, $u(x) = 0$, or u est injective, donc $x = 0$, ce qui prouve que $Ker(w) = \{0\}$, donc que w est injective.
Soit $z \in G$. v est surjective, donc il existe $y \in F$ tel que $z = v(y)$.
Il existe $(i, k) \in Im(u) \times Ker(v)$ tel que $y = i + k$, donc $z = v(y) = v(i) + v(k) = v(i)$.
Or $i \in Im(u)$, donc il existe $x \in E$ tel que $i = u(x)$. Ainsi, $z = v(i) = w(x)$, ce qui prouve que w est surjective.
Cependant, il est possible d'aller plus vite en utilisant le résultat suivant du cours.
Si a est une application linéaire de E dans F, et si H est un supplémentaire de $Ker(a)$, $\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & Im(a) \\ x & \longmapsto & a(x) \end{array}$ est un isomorphisme.]

u étant injective, l'application $u' : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Im(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme. De plus $Im(u)$ est un supplémentaire de $Ker(v)$ dans F, donc $v' : \begin{array}{ccc} Im(u) & \longrightarrow & Im(v) = G \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$ est aussi un isomorphisme, or $w = v' \circ u'$, donc w est un isomorphisme.

• Supposons w est un isomorphisme.

◇ Pour tout $z \in G$, $z = w(w^{-1}(z)) = v[u \circ w^{-1}(z)]$, donc v est surjective.

◇ Si $u(x) = 0$, $w(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $x = 0$. Ainsi, u est injective.

◇ Soit $y \in Ker(v) \cap Im(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
$0 = v(y) = v(u(x)) = w(x)$, donc $x = 0$. Ainsi, $y = u(x) = 0$, ce qui prouve que $Ker(v) \cap Im(u) = \{0\}$.

◇ Soit $y \in F$.

[On cherche $(i, k) \in Im(u) \times Ker(v)$ tel que $y = i + k$.
Mais si $y = i + k$ avec $(i, k) \in Im(u) \times Ker(v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $i = u(x)$. De plus, $v(y) = w(x) + v(k) = w(x)$, donc $x = w^{-1}(v(y))$ et $k = y - u \circ w^{-1}(v(y))$.]

Posons $x = w^{-1}(v(y))$ et $k = y - u \circ w^{-1}(v(y))$.
$v(k) = v(y) - v \circ u \circ w^{-1}(v(y)) = v(y) - w \circ w^{-1}(v(y)) = v(y) - v(y) = 0$,
donc $k \in Ker(v)$. De plus, $u(x) + k = y$, donc $y \in Im(u) + Ker(v)$.
Ainsi, $F = Im(u) \oplus Ker(v)$.