

## DM 28 : Produit tensoriel

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**

**Il n'est pas à rendre.**

**Un corrigé sera fourni le jeudi 15 janvier.**

$\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

### Partie I : applications bilinéaires

Lorsque  $E, F$  et  $G$  sont trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, si  $b$  est une application de  $E \times F$  dans  $G$ , on dit que  $b$  est bilinéaire si et seulement si, pour tout  $x, y \in E$ , pour tout  $z, t \in F$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $b(\alpha x + y, z) = \alpha b(x, z) + b(y, z)$  et  $b(x, \alpha z + t) = \alpha b(x, z) + b(x, t)$ .

1°) Montrer que  $(x, y) \mapsto xy$  est une application bilinéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Plus généralement, si  $A$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre, montrer que  $(x, y) \mapsto xy$  est une application bilinéaire de  $A^2$  dans  $A$ .

2°) On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$  et  $F$  l'espace vectoriel des applications de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . Pour tout  $(f, g) \in E \times F$ , on pose  $b(f, g) = \int_0^1 f(t)(g(t) + 2g'(t)) dt$ . Montrer que  $b$  est bilinéaire.

3°) Lorsque  $E, F$  et  $G$  sont 3  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, montrer que l'ensemble noté  $B(E, F; G)$  des applications bilinéaires de  $E \times F$  dans  $G$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

4°) Lorsque  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on note  $L(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

On suppose que  $E, F$  et  $G$  sont 3  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Montrer que  $B(E, F; G)$  est isomorphe à  $L(E, L(F, G))$ .

### Partie II : unicité du produit tensoriel

Dans cette partie, on fixe deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels notés  $E$  et  $F$ .

Soit  $P$  un troisième  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et

$u$  une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $P$ .

5°) Lorsque  $G$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, montrer que l'application  $\ell \mapsto \ell \circ u$  est une application linéaire de  $L(P, G)$  dans  $B(E, F; G)$ .

Lorsque, pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $G$ , l'application  $\ell \mapsto \ell \circ u$  est un isomorphisme de  $L(P, G)$  dans  $B(E, F; G)$ , on dit que  $P$ , muni de  $u$ , est un produit tensoriel de  $E$  par  $F$ .

6°) Soit  $P'$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u' \in B(E, F; P')$ .

On suppose que  $P$  muni de  $u$  est un produit tensoriel de  $E$  par  $F$ .

Montrer que  $P'$  muni de  $u'$  est aussi un produit tensoriel de  $E$  par  $F$  si et seulement si il existe un isomorphisme  $h$  de  $P$  dans  $P'$  tel que  $u' = h \circ u$ .

On peut donc dire que, si le produit tensoriel de  $E$  par  $F$  existe, alors il est unique à un isomorphisme près.

Ainsi, lorsque  $P$  muni de  $u$  est un produit tensoriel de  $E$  par  $F$ , on dira que  $P$  est le produit tensoriel de  $E$  par  $F$ , et on le notera  $E \otimes F$ . De plus, pour tout  $(x, y) \in E \times F$ , on notera  $x \otimes y = u(x, y)$ .

Alors, pour tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $G$  et pour toute application bilinéaire  $b$  de  $E \times F$  dans  $G$ , il existe une unique application linéaire  $b'$  de  $E \otimes F$  dans  $G$  telle que, pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $b(x, y) = b'(x \otimes y)$ . On convient d'identifier  $b$  et  $b'$ , de sorte que toute application bilinéaire  $b$  de  $E \times F$  dans  $G$  peut être vue comme une application linéaire de  $E \otimes F$  dans  $G$ .

De plus, tout autre produit tensoriel de  $E$  par  $F$  se déduit de  $E \otimes F$  par un isomorphisme  $h$  de  $E \otimes F$  dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $P'$  : alors  $P'$  est un produit tensoriel de  $E$  par  $F$  muni de  $u' = h \circ u$ . Si l'on note  $P' = E \otimes' F$ , et pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $u'(x, y) = x \otimes' y$ , alors : pour tout  $(x, y) \in E \times F$ ,  $x \otimes' y = h(x \otimes y)$ .

### Partie III : quotient d'espaces vectoriels

Dans cette partie, on fixe un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ . Pour tout  $x, y \in E$ , on convient que  $x R y$  si et seulement si  $x - y \in F$ .

7°) Montrer que  $R$  est une relation d'équivalence.

Lorsque  $x \in E$ , on note  $\bar{x}$  la classe d'équivalence de  $x$  pour cette relation d'équivalence. De plus l'ensemble quotient  $E/R$  est noté  $E/F$  : c'est le quotient de l'espace vectoriel  $E$  par l'espace vectoriel  $F$ .

On définit sur  $E/F$  une addition et une multiplication par des scalaires en convenant que, pour tout  $x, y \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$  et  $\alpha \cdot \bar{x} = \overline{\alpha x}$ .

8°) Montrer que ces égalités structurent  $E/F$  en un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

9°) On suppose que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $F \oplus G = E$ , c'est-à-dire tel que  $E = F + G$  et  $F \cap G = \{0\}$ .

Montrer que  $E/F$  est isomorphe à  $G$ .

10°) Pour cette seule question,  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$ .

On note  $G$  la droite vectorielle engendrée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Montrer  $E = F \oplus G$  puis que  $E/F$  est une droite vectorielle.

#### Partie IV : existence du produit tensoriel

Dans cette partie, on fixe à nouveau deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels notés  $E$  et  $F$ .

Lorsque  $I$  est un ensemble quelconque et que  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $\mathbb{K}$ , on dit que cette famille est presque nulle si et seulement si  $\{i \in I / x_i \neq 0\}$  est fini. On note  $\mathbb{K}^{(I)}$  l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de  $\mathbb{K}$ .

11°) Montrer que  $\mathbb{K}^{(I)}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Pour tout  $i, j \in I$ , on pose  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$ .

Pour tout  $i \in I$ , on note  $c_i = (\delta_{i,j})_{j \in I}$ .

12°) Montrer que la famille  $(c_i)_{i \in I}$  est une base de  $\mathbb{K}^{(I)}$ .

On dit que  $(c_i)_{i \in I}$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^{(I)}$ .

On note  $Q = \mathbb{K}^{(E \times F)}$  et  $(c_{e,f})_{(e,f) \in E \times F}$  la base canonique de  $Q$ .

On note également  $A_1 = \{c_{\alpha e + e', f} - \alpha c_{e,f} - c_{e', f} / \alpha \in \mathbb{K}, e, e' \in E, f \in F\}$

et  $A_2 = \{c_{e, \alpha f + f'} - \alpha c_{e,f} - c_{e, f'} / \alpha \in \mathbb{K}, e \in E, f, f' \in F\}$ .

Enfin, on note  $S$  le sous-espace vectoriel de  $Q$  engendré par  $A_1 \cup A_2$  et  $P = Q/S$ .

13°) Montrer que  $(e, f) \mapsto \overline{c_{e,f}}$  est une application bilinéaire de  $E \times F$  dans  $P$ , que l'on notera  $u$ .

14°) Montrer que  $P$  muni de  $u$  est un produit tensoriel de  $E$  par  $F$ .

#### Partie V : Newton $\iff$ Leibniz

15°) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

Calculer la dérivée  $n$ -ième de  $t \mapsto e^{at}$ .

À partir de la formule de Leibniz, relative à la dérivée  $n$ -ième du produit de deux fonctions, retrouver la formule du binôme de Newton relative au développement de  $(a + b)^n$ .

Réciproquement, nous souhaitons retrouver la formule de Leibniz à partir de la formule du binôme de Newton.

On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (on ne demande pas de prouver que c'est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel).

16°) Montrer qu'il existe un unique triplet  $(d_1, d_2, p)$  tels que  $d_1$  et  $d_2$  sont des endomorphismes de  $E \otimes E$  et  $p \in L(E \otimes E, E)$  et tels que, pour tout  $f, g \in E$ ,  $d_1(f \otimes g) = f' \otimes g$ ,  $d_2(f \otimes g) = f \otimes g'$  et  $p(f \otimes g) = fg$ .

On note  $d$  l'application de  $E$  dans  $E$  définie par  $d(f) = f'$ .

**17°)** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $d^n p = p(d_1 + d_2)^n$ , où le produit utilisé est la composition.

**18°)** Conclure.