DM 29 : Représentations linéaires d'un groupe

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque
et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Lorsque $u, v \in L(E)$, on notera uv la composée de u par v.
En particulier, u^2 désigne $u \circ u$.

Partie I : Projecteurs

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
On dit qu'ils sont supplémentaires dans E si et seulement si ils vérifient l'une des conditions équivalentes suivantes (on ne demande pas de démontrer ces équivalences) :
- $E = F \oplus G$;
- $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$;
- $\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in F \times G\ \ x = x_1 + x_2$;

1°) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
Pour $x \in E$, on note $(p(x), q(x))$ l'unique couple de $F \times G$ tel que $x = p(x) + q(x)$.
On dit que p est le projecteur sur F parallèlement à G et que q est le projecteur sur G parallèlement à F. Montrer les propriétés suivantes :
- p et q sont des endomorphismes de E ;
- $p^2 = p$ et $q^2 = q$;
- $p + q = Id_E$;
- $pq = qp = 0$.

2°) Lorsque $p \in L(E)$, on dit que p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.
Montrer qu'en effet, dans ce cas, p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
On commencera par démontrer que, pour tout $x \in E$, $[x = p(x) \iff x \in \mathrm{Im}(p)]$.

3°) Pour chacun des endomorphismes suivants (on ne demande pas de montrer que ce sont bien des endomorphismes), montrer que c'est un projecteur et préciser son noyau et son image.
- Id_E ;
- $0_{L(E)}$;
- L'application $p_1\ :\ \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ définie par $p_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.

4°) On suppose que E est l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions paires de E et que $\mathcal{I}$ est l'ensemble des fonctions impaires. On note p le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$.
Pour tout $f \in E$, donner une expression de $p(f)$.

Partie II : Trace d'un endomorphisme

On suppose pour toute la suite de ce problème que E est de dimension finie et l'on note $n = \dim(E)$.

Lorsque $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on note e_i^* la forme linéaire sur E définie par : si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, alors $e_i^*(x) = x_i$. Ainsi, l'application e_i^* associe à tout vecteur x sa i-ème coordonnée dans la base e. On dit que e_i^* est l'application "i-ème coordonnée".

5°) Avec ces notations, si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, montrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^* (où $E^* = L(E, \mathbb{K})$). On dit que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale de e.

6°) Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de e.
Soit F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $f = (f_1, \ldots, f_p)$ une base de F et $(f_1^*, \ldots, f_p^*)$ la base duale de f.
Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$, pour tout $x \in E$, on pose $g_{i,j}(x) = e_i^*(x) f_j$.
Montrer que, pour tout $u \in L(E, F)$, $u = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} f_j^*(u(e_k)) g_{k,j}$.
En déduire que $(g_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $L(E, F)$.

Lorsque e est une base de E et que $u \in L(E)$, on pose $\mathrm{Tr}_e(u) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(u(e_i))$: $\mathrm{Tr}_e(u)$ s'appelle la trace de u relativement à la base e.

7°) Lorsque e est une base de E, montrer que Tr_e est une forme linéaire sur $L(E)$.

8°) On suppose que e est une base de E. Soit $u, v \in L(E)$.
Montrer que $\mathrm{Tr}_e(uv) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_j^*(v(e_i)) e_i^*(u(e_j))$.
En déduire que $\mathrm{Tr}_e(uv) = \mathrm{Tr}_e(vu)$.

9°) On suppose que $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sont deux bases de E.
On note v l'unique endomorphisme de E tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $v(e_i) = f_i$.
Montrer que $\mathrm{Tr}_e(u) = \mathrm{Tr}_f(vuv^{-1})$.
En déduire que $\mathrm{Tr}_e(u) = \mathrm{Tr}_f(u)$.

Ainsi, la quantité $\mathrm{Tr}_e(u)$ ne dépend pas du choix de la base e, mais dépend seulement de u. On la note $\mathrm{Tr}(u)$. On dit que $\mathrm{Tr}(u)$ est la trace de u.

10°) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \dim(F)$.

11°) Soit F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $u \in L(E)$ et $v \in L(F)$. On définit un endomorphisme Ψ sur $L(E, F)$ en convenant que, pour tout $f \in L(E, F)$, $\Psi(f) = vfu$. Montrer que $\mathrm{Tr}(\Psi) = \mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v)$.

Partie III : Formule de Burnside

Pour toute la suite du problème, Γ désigne un groupe fini, noté multiplicativement.
Une représentation linéaire de Γ est la donnée d'un couple (E, ρ), où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et où ρ est un morphisme de Γ dans $(GL(E), \circ)$ (le groupe linéaire de E, constitué des automorphismes de E).
Pour dire que (E, ρ) est une représentation linéaire de Γ, on dira plus rapidement que E est un Γ-espace sans toujours préciser ρ. Dans ce cas, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in E$, on notera $\gamma.x = \rho(\gamma)(x)$.

12°) Montrer que (E, ρ) est une représentation linéaire de Γ si et seulement si, pour tout $x, y \in E$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$\gamma.(x + y) = \gamma.x + \gamma.y, \quad \gamma.(\lambda x) = \lambda(\gamma.x), \quad 1_\Gamma.x = x$ et $\gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$.

13°) Soit E un Γ-espace. On pose $E_\Gamma = \{x \in E \ / \ \forall \gamma \in \Gamma, \ \ \gamma.x = x\}$.
On pose $\pi = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma)$, où $|\Gamma|$ désigne le cardinal de Γ.
Pour tout $\gamma' \in \Gamma$, montrer que $\rho(\gamma') \circ \pi = \pi$.
En déduire que π est un projecteur d'image E_Γ, puis que $\mathrm{Tr}(\pi) = \dim(E_\Gamma)$.

Lorsque (E, ρ) est une représentation linéaire de Γ, pour tout $\gamma \in \Gamma$,
on pose $\chi_E(\gamma) = \mathrm{Tr}(\rho(\gamma))$. Ainsi, χ_E est une application de Γ dans $\mathbb{K}$, que l'on appelle le caractère de (E, ρ).
On dit que χ est un caractère de Γ si et seulement si il existe un Γ-espace E tel que $\chi = \chi_E$.

14°) Soit χ un caractère de Γ. Montrer que tous les Γ-espaces E tels que $\chi_E = \chi$ ont la même dimension, que l'on exprimera en fonction de χ.

15°) Avec les notations de la question 13, montrer que $\dim(E_\Gamma) = \dfrac{1}{|\Gamma|} \displaystyle\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_E(\gamma)$.

Pour la suite du problème, X désigne un ensemble fini.
On appelle action de Γ sur X toute application f de $\Gamma \times X$ dans X telle que, en convenant de noter $f(\gamma, x) = \gamma.x$, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in X$, on ait :
pour tout $x \in X$, pour tout $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $1_\Gamma.x = x$ et $\gamma.(\gamma'.x) = (\gamma\gamma').x$.

16°) Considérons une telle action de Γ sur X. On définit sur X la relation binaire R en convenant que, pour tout $x, y \in X$, $x \ R \ y \iff [\exists \gamma \in \Gamma, \ \ y = \gamma.x]$.

Montrer que R est une relation d'équivalence.
Lorsque $x \in X$, la classe d'équivalence de x pour la relation R est appelée l'orbite de x sous l'action de Γ.

$\mathbb{K}^X$ désigne l'ensemble des applications de X dans $\mathbb{K}$. La base canonique de $\mathbb{K}^X$ est la famille $(e_x)_{x\in X}$, où pour tout $x \in X$, pour tout $y \in X$, $e_x(y) = \delta_{x,y}$ (égal à 1 si $x = y$ et à 0 sinon). On ne demande pas de démontrer que c'est bien une base.
On suppose que f est une action de Γ sur X.

17°) Montrer qu'en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $x \in X$, $\rho(\gamma)(e_x) = e_{f(\gamma,x)}$ (c'est-à-dire, avec les notations précédentes, $\gamma.e_x = e_{\gamma.x}$), le couple $(\mathbb{K}^X, \rho)$ est une représentation linéaire de Γ.
Montrer que, pour tout $(f, x, \gamma) \in \mathbb{K}^X \times X \times \Gamma$, $(\gamma.f)(x) = f(\gamma^{-1}.x)$.

18°) On pose $E = \mathbb{K}^X$. On rappelle que $E_\Gamma = \{f \in E \ / \ \forall\gamma \in \Gamma,\ \ \gamma.f = f\}$.
Montrer que $\dim(E_\Gamma)$ est égale au nombre d'orbites de X sous l'action de Γ.

On note χ_X le caractère de la représentation linéaire $(\mathbb{K}^X, \rho)$.
Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on note r_γ le nombre de $x \in X$ tels que $\gamma.x = x$:
ainsi, $r_\gamma = |\{x \in X \ / \ \gamma.x = x\}|$.

19°) Montrer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $r_\gamma = \chi_X(\gamma)$.
En déduire la formule de Burnside : $\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} r_\gamma = s|\Gamma|$, où s est égal au nombre d'orbites de X sous l'action de Γ.

20°) On suppose que $|X| \geq 2$ et que, pour tout $x, y \in X$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $y = \gamma.x$ (on dit que Γ agit transitivement sur X). Montrer qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que, pour tout $x \in X$, $\gamma.x \neq x$.

Partie IV : Propriétés des caractères

Dans cette partie, E et F désignent deux Γ-espaces.
Lorsque $u \in L(E, F)$ et $\gamma \in \Gamma$, on définit $\gamma.u \in L(E, F)$ par :
pour tout $x \in E$, $(\gamma.u)(x) = \gamma.[u(\gamma^{-1}.x)]$.

21°) Montrer que $L(E, F)$ devient ainsi un Γ-espace,
dont le caractère sera noté $\chi_{L(E,F)}$.

22°) Montrer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\chi_{L(E,F)}(\gamma) = \chi_E(\gamma^{-1})\chi_F(\gamma)$.

Pour tout $f, g \in \mathbb{K}^\Gamma$, on pose $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{|\Gamma|}\displaystyle\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)g(\gamma^{-1})$.

23°) Montrer que, pour tout $f, g \in \mathbb{K}^\Gamma$, $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.
Soit $f \in \mathbb{K}^\Gamma$. Montrer que si, pour tout $g \in \mathbb{K}^\Gamma$, $\langle f, g\rangle = 0$, alors $f = 0$.

Soit $u \in L(E, F)$. On dit que u est un Γ-morphisme de E dans F si et seulement si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et $x \in E$, on a $u(\gamma.x) = \gamma.u(x)$.

On note $\hom_\Gamma(E,F)$ l'ensemble des Γ-morphismes de E dans F.

24°) Montrer que $\dim(\hom_\Gamma(E,F)) = \langle \chi_E, \chi_F \rangle$.
En déduire que lorsque $E \neq \{0\}$, $\langle \chi_E, \chi_E \rangle \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose $\chi_{unit}(\gamma) = 1$.

25°) Montrer que χ_{unit} est un caractère de Γ.
Montrer que $\langle \chi_E, \chi_{unit} \rangle = \dim(E_\Gamma)$.

26°) Si χ et χ' sont deux caractères de Γ, montrer que $\chi + \chi'$ est un caractère de Γ (on pourra munir le produit cartésien de deux Γ-espaces d'une structure de Γ-espace).

27°) Soit χ un caractère de Γ. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, on pose $\chi^*(\gamma) = \chi(\gamma^{-1})$.
Montrer que χ^* est un caractère de Γ (on pourra munir le dual d'un Γ-espace d'une structure de Γ-espace).

28°) Si χ et χ' sont deux caractères de Γ, montrer que $\chi\chi'$ est un caractère de Γ.