

Feuille d'exercices 13 : Normes et suites.

Exercice 13.1 : (niveau 1)

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé,
démontrer qu'une suite périodique convergente est constante.

Exercice 13.2 : (niveau 1)

Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$. Montrez que (u_n) converge si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 13.3 : (niveau 1)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de réels. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(u_n, v_n)$.

Exercice 13.4 : (niveau 1)

On suppose que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$.
Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 13.5 : (niveau 1)

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ et pour tout $f \in E$, on pose $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.
Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E . Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 13.6 : (niveau 1)

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par :
 $u_0 = a$, $v_0 = b$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1°) Montrez que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$.

2°) Montrez que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

3°) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Exercice 13.7 : (niveau 1)

Soit (u_n) une suite telle que les sous-suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent.
Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 13.8 : (niveau 2)

Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $n(a_n + a_{2n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

1°) Montrer que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2°) On suppose que $na_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\ell = \frac{2}{3}$.

Exercice 13.9 : (niveau 2)

E est un espace vectoriel normé. B et C sont deux parties non vides de E .

Montrer que $\delta(B \cup C) \leq \delta(B) + \delta(C) + d(B, C)$.

Exercice 13.10 : (niveau 2)

1°) Définir sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n = 0\}$ les normes 1, 2 et ∞ et montrer directement que ce sont bien des normes.

2°) Montrer que ces normes sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 13.11 : (niveau 2)

Démontrer que la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exercice 13.12 : (niveau 2)

On suppose que $u_0 = 1$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.
Déterminer u_n en fonction de n .

En déduire la valeur de $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}$.

Exercice 13.13 : (niveau 2)

Soit f une application injective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

Démontrer que $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 13.14 : (niveau 2)

Notons E l'ensemble des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Soit φ une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $\int_0^1 \varphi \neq 0$. Pour tout $f \in E$, on pose

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \text{ et } N'(f) = \left| \int_0^1 f(t)\varphi(t)dt \right| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Montrer que N et N' sont des normes équivalentes sur E .

Exercice 13.15 : (niveau 3)

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

Exercice 13.16 : (niveau 3)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel et soit K une partie de E .

On suppose que K est convexe et bornée. On suppose aussi que K symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que, pour tout $x \in K$, $-x \in K$.

On suppose enfin que 0 est un point intérieur de K , c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que K contient la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε .

Pour tout $x \in E$, on pose $N_x = \{|\lambda| / \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } \frac{x}{\lambda} \in K\}$ et $N(x) = \inf(N_x)$.

1°) Montrer que N est une norme sur E .

2°) Montrer que N et $\|\cdot\|$ sont des normes équivalentes.

Exercices supplémentaires

Exercice 13.17 : (niveau 1)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent. Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Exercice 13.18 : (niveau 1)

Soit (u_n) une suite croissante de réels telle que $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que (u_n) converge.

Exercice 13.19 : (niveau 1)

On suppose que $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}$.

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 13.20 : (niveau 2)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq a$, $v_n \leq b$, et tels que $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b$.

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} b$.

Exercice 13.21 : (niveau 2)

Dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé non réduit à $\{0\}$, montrer que deux boules fermées sont égales si et seulement si elles ont même centre et même rayon.

Exercice 13.22 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite quelconque de réels.

Montrer que (u_n) est la différence de deux suites strictement croissantes.

Exercice 13.23 : (niveau 2)

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite de réels telle que, pour tout $k \geq 2$, la sous-suite (u_{kn}) converge vers ℓ . Peut-on affirmer que (u_n) converge vers ℓ ?

Exercice 13.24 : (niveau 2)

Une personne a dépensé tout ce qu'elle avait en poche dans N magasins. Dans chacun elle a dépensé dix euros de plus que la moitié de ce qu'elle avait en entrant. Combien avait-elle en poche au départ ?

Exercice 13.25 : (niveau 2)

Déterminer les réels θ tels que toutes les suites (u_n) de réels vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0$ soient périodiques.

Exercice 13.26 : (niveau 2)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une suite (u_n) définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence affine d'ordre 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$.

1°) On suppose que $a + b \neq 1$.

a) Donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n .

b) Le faire dans le cas où $a = -1$, $b = 6$, $c = 4$, $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

2°) On suppose que $a + b = 1$.

a) Donner une méthode de détermination de u_n en fonction de n : on pourra poser $w_n = u_{n+1} - u_n$.

b) Le faire dans le cas où $a = 3$, $b = -2$, $c = 1$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 0$.

Exercice 13.27 : (niveau 2)

On considère une suite de complexes (z_n) vérifiant la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

Déterminer la limite de z_n lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de z_0 .

Exercice 13.28 : (niveau 2)

Soient $p \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $N(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

1°) Montrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$N(tx + (1-t)y)^p \leq tN(x)^p + (1-t)N(y)^p.$$

2°) Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n / N(x) \leq 1\}$ est convexe.

3°) Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^n .

Exercice 13.29 : (niveau 2)

Soit E l'ensemble des applications lipschitziennes de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

1°) Montrer que si $f \in E$, on peut définir le plus petit réel positif $k(f)$ tel que f soit $k(f)$ -lipschitzienne.

2°) Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

3°) On pose $M(f) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $N(f) = M(f) + k(f)$.

Montrer que M et N sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 13.30 : (niveau 2)

Soit (a_n) une suite réelle telle que :

i) $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 1$ et :

ii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad a_{m+n} \leq a_m a_n$.

Montrez que la suite $b_n = \frac{\ln(a_n)}{n}$ converge vers sa borne inférieure.

Exercice 13.31 : (niveau 3)

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé et A est une partie non vide de E .

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne avec $k > 0$. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = \sup_{t \in A} (f(t) - k\|x - t\|)$.

1°) Montrer que g est bien définie.

2°) Montrer que g prolonge f sur E .

3°) Montrer que g est k -lipschitzienne.

Exercice 13.32 : (niveau 3)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, où \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit B une partie de E .

Montrer qu'il existe une norme sur E dont B est la boule unité si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- B est convexe ;
- B ne contient aucune droite ;
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $|\alpha| \leq 1$, $\alpha B \subset B$ (on dit que B est équilibrée) ;
- $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{K}} \alpha B$ (on dit que B est absorbante).

Exercice 13.33 : (niveau 3)

On dira qu'une partie T de \mathbb{N}^* est négligeable si et seulement si $\frac{|T_n|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

où $T_n = T \cap [1, n]$ et où $|T_n|$ désigne le cardinal de T_n .

Une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de complexes est dite presque convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si il existe une partie négligeable $T \subset \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, [n \geq p] \wedge [n \notin T] \implies |a_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

ℓ est alors unique, on ne demande pas de le démontrer.

1°) Montrer que l'ensemble $P = \{n \in \mathbb{N}^* / \exists m \in \mathbb{N}^*, n = m^2\}$ des carrés parfaits est négligeable.

2°) a) Montrer que (a_n) , définie par $a_n = n$ si $n \in P$ et $a_n = \frac{1}{n}$ sinon, est presque convergente vers 0.

b) Une sous-suite d'une suite presque convergente est-elle presque convergente ?

Dans les deux questions qui suivent, (a_n) est une suite de réels, $(b_n) = \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)$ est sa moyenne de Cesaro et on suppose que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3°) On suppose dans cette question que les a_n sont positifs ou nuls.

a) Montrer qu'il existe une suite décroissante (u_n) de réels strictement positifs telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{b_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

b) Soit $T = \{k \in \mathbb{N}^* / a_k \geq u_k\}$. Montrer que T est négligeable.

c) En déduire que a_n est presque convergente vers 0.

4°) Montrer que l'hypothèse de positivité en question 3 est essentielle en donnant un exemple de suite (a_n) de réels telle que $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 13.34 : (niveau 3)

1°) Si z est un complexe de module 1, montrer que 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et z_1, \dots, z_p p complexes de module 1. Montrer que p est une valeur d'adhérence de la suite $(z_1^n + \dots + z_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$.