Correction du DM 29

Merci de pré-corriger votre devoir, en tenant compte des commentaires qui suivent et en vous référant au corrigé type présent sur le site. Je vous demande ensuite de le scanner page à page, dans le bon sens et de le déposer sur mon site au format .pdf.

D'une manière générale, lorsque l'énoncé utilise un objet mathématique dont l'existence n'est pas assurée, il ne faut pas considérer que l'énoncé suppose son existence : c'est à vous de prouver l'existence de cet objet mathématique, c'est une des règles du jeu. Ainsi en question 4, il fallait montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ pour prouver que p est correctement défini et en question 9, il fallait montrer que v est bijectif pour prouver que v^{-1} existe.

Voici quelques commentaires spécifiques à certaines questions.

- Question 4 : Il faut d'abord montrer que le projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$ est bien défini, c'est-à-dire que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
- Question 5 :
  - Il faut d'abord montrer que les e_i^* sont bien des formes linéaires.
  - Pour montrer que $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*, le plus simple était de montrer la liberté ou le caractère générateur, puis de montrer que le cardinal de e est égal à $\dim(E^*)$.
- Question 6 : là encore, pour montrer qu'on est en présence d'une base, le plus simple est de comparer le cardinal de la famille et la dimension de l'espace.
- Question 8 : on attend des arguments précis de linéarité pour la première formule, et pour la seconde formule, l'utilisation précise d'une interversion de sommations et d'un changement de variables.
- Question 9 :
  - Pensez à montrer que v^{-1} est bien défini, par exemple en disant que v envoie la base e sur la base f, donc v est un isomorphisme.
  - En fin de question, pour montrer que $\mathrm{Tr}_f(vuv^{-1}) = \mathrm{Tr}_f(u)$, le bon argument est : $\mathrm{Tr}_f(v(uv^{-1})) = \mathrm{Tr}_f((uv^{-1})v) = \mathrm{Tr}_f(u)$. Mais si vous utilisez que $\mathrm{Tr}_f((vu)v^{-1})) = \mathrm{Tr}_f((uv)v^{-1}) = \mathrm{Tr}_f(u)$, le raisonnement est faux.
- Question 10 : Il fallait utiliser une base de E construite en concaténant une base de F et une base de G. Deux erreurs fréquentes à ce sujet :
  - Si $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base quelconque de E, a priori, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $e_i \notin (F \cup G)$.

  - Si vous partez d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F et que vous la complétez en une base de E sans autre précision, a priori, les vecteurs qui la complètent ne sont pas dans G.
- Question 12 : La difficulté de la question est bien cachée : si le lot de propriétés de l'énoncé est vérifié, il ne faut pas oublier de montrer que $\rho(\gamma)$ est une bijection.