# Limites et continuité

## Table des matières

**$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

# 1 Topologie dans un espace métrique

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique $(E, d)$ non vide.

## 1.1 Ouverts et fermés

**Définition.** Soient $x \in E$ et $V$ une partie de $E$.
$\boxed{V \text{ est un voisinage de } x \text{ si et seulement s'il existe } r > 0 \text{ tel que } B_o(x, r) \subset V.}$
$\mathcal{V}(x)$ désignera l'ensemble des voisinages de $x$.

**Remarque.** Si $E$ est un espace vectoriel normé, lorsqu'on remplace la norme sur $E$ par une norme équivalente, pour tout $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ n'est pas modifié.

**Propriété.** La notion de voisinage satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ Pour tout $x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Pour tout $x \in E$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, si $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Si $x \in E$ et si $(V, W) \in \mathcal{V}(x)^2$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

***Démonstration.***
◇ Soit $x \in E$. $B_o(x, 1) \subset E$, donc $E \in \mathcal{V}(x)$.
◇ Soient $x \in E$, $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \supset V$.
Il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset V \subset W$, donc $W \in \mathcal{V}(x)$.
◇ Soient $x \in E$ et $(V, W) \in \mathcal{V}(x)^2$. Il existe $(r, r') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $B_o(x, r) \subset V$ et $B_o(x, r') \subset W$. Posons $r" = min(r, r')$. $B_o(x, r") \subset V \cap W$, donc $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$. □

**Propriété.** Si $x \in E$, une intersection finie de voisinages de $x$ est un voisinage de $x$.

***Démonstration.***
Par récurrence sur le nombre de voisinages. □

**Définition.** Soit $U$ une partie de $E$.
$\boxed{U \text{ est un ouvert si et seulement si } U \text{ est un voisinage de chacun des ses points.}}$

**Remarque.** "Intuitivement", $U$ est un ouvert si et seulement si aucun point de la frontière de $U$ n'est dans $U$. Notons $Fr(U)$ la frontière de $U$. Ainsi, $U$ est un ouvert si et seulement si $Fr(U) \cap U = \emptyset$. Plus tard, lorsque nous aurons mathématiquement défini la frontière de $U$, cette propriété se démontrera. Pour le moment, elle donne une version intuitive de la notion d'ouvert, fondée sur la notion intuitive de frontière d'une partie.

**Propriété.** La notion d'ouvert satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ $\emptyset$ et $E$ sont des ouverts de $E$.
- ◇ Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- ◇ Si $I$ est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de $E$, alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de $E$.

***Démonstration.***
◇ $\forall x \in \emptyset \quad \emptyset \in \mathcal{V}(x)$, donc $\emptyset$ est un ouvert de $E$.
◇ Pour tout $x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$, donc $E$ est un ouvert de $E$.
◇ Soient $p \in \mathbb{N}$ et $U_1, \ldots, U_p$ $p$ ouverts de $E$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} U_i$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x \in U_i$, donc $U_i \in \mathcal{V}(x)$. Ainsi $\bigcap_{i=1}^{p} U_i \in \mathcal{V}(x)$.

On a montré que $\bigcap_{i=1}^{p} U_i$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est donc un ouvert.
◇ Soit $I$ un ensemble quelconque et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $E$. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$.
Il existe $j \in I$ tel que $x \in U_j$. $U_j \in \mathcal{V}(x)$ et $U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{V}(x)$, ce qui prouve que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est voisinage de chacun de ses points, donc que c'est un ouvert. □

**Définition.** L'ensemble des ouverts de $E$ est appelé la topologie de $E$.

**Propriété.** Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.

***Démonstration.***
• Soit $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Montrons que $B_o(a, r)$ est un ouvert.
Soit $x \in B_o(a, r)$. Posons $\alpha = r - d(a, x) > 0$. Pour tout $y \in B_o(x, \alpha)$,
$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \alpha = r$, donc $y \in B_o(a, r)$. Ainsi
$B_o(x, \alpha) \subset B_o(a, r)$, ce qui prouve que $B_o(a, r) \in \mathcal{V}(x)$. Ainsi $B_o(a, r)$ est voisinage de chacun de ses points, donc c'est un ouvert.
Une réunion de boules ouvertes est donc un ouvert, en tant que réunion d'ouverts.
• Réciproquement, soit $U$ un ouvert de $E$. Pour tout $x \in U$, $U$ est un voisinage de $x$, donc il existe $r_x > 0$ tel que $B_o(x, r_x) \subset U$.
Pour tout $x \in U$, $B_o(x, r_x) \subset U$, donc $\bigcup_{x \in U} B_o(x, r_x) \subset U$.
De plus, si $y \in U$, $y \in B_o(y, r_y) \subset \bigcup_{x \in U} B_o(x, r_x)$, donc $U \subset \bigcup_{x \in U} B_o(x, r_x)$. Ainsi
$U = \bigcup_{x \in U} B_o(x, r_x)$. □

**Remarque.** Dans la démonstration précédente, l'existence de la famille $(r_x)_{x \in U}$ utilise l'axiome du choix. On peut s'en passer car en adaptant la démonstration précédente, on peut montrer que si $U$ est un ouvert, alors $U$ est la réunion de *toutes* les boules ouvertes incluses dans $U$.

**Remarque.** Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

***Démonstration.***
• Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si $I = ]a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, $I$ est la boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$.

- Si $I = ]a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$, $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]a, a+n[$ est un ouvert.
- Enfin, si $I = ]-\infty, a[$, où $a \in \mathbb{R}$, $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} ]a-n, a[$ est aussi un ouvert. □

**Remarque.** Une intersection infinie d'ouverts n'est pas toujours un ouvert.

***Démonstration.***
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $]0, 1+\frac{1}{n}[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$,
mais $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} ]0, 1+\frac{1}{n}[ = ]0,1]$ n'est pas un ouvert car $]0,1]$ n'est pas un voisinage de 1. En effet, pour tout $r > 0$, $B_o(1,r) = ]1-r, 1+r[ \not\subset ]0,1]$. □

**Définition.**

$$\boxed{\text{Une partie } F \text{ de } E \text{ est un fermé de } E \text{ si et seulement si son complémentaire est un ouvert.}}$$

**Exemple.** $\mathbb{Z}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire est ouvert : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} ]n, n+1[$.

**Remarque.** "Intuitivement", $F$ est un fermé si et seulement si tous les points de la frontière de $F$ sont dans $F$, c'est-à-dire si et seulement si $Fr(F) \subset F$. Plus tard, lorque nous aurons mathématiquement défini la frontière de $F$, cette propriété se démontrera. Pour le moment, elle donne une version intuitive de la notion de fermé, fondée sur la notion intuitive de frontière d'une partie.

**Propriété.** La notion de fermé satisfait les propriétés suivantes :
◇ $\emptyset$ et $E$ sont des fermés de $E$.
◇ Une réunion finie de fermés est un fermé.
◇ Si $I$ est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés de $E$, alors $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de $E$.

***Démonstration.***
◇ $E \setminus \emptyset = E$ est un ouvert, donc $\emptyset$ est un fermé. De même $E$ est un fermé.
◇ Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_p$ $p$ fermés de $E$. $E \setminus \displaystyle\bigcup_{1\leq i\leq p} F_i = \bigcap_{1\leq i\leq p} (E \setminus F_i)$ est une intersection finie d'ouverts, donc est un ouvert, donc $\displaystyle\bigcup_{1\leq i\leq p} F_i$ est un fermé de $E$.
◇ Soient $I$ un ensemble quelconque et $(F_i)_{i\in I}$, une famille de fermés de $E$.
$E \setminus \displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$ est une réunion d'ouverts, donc est un ouvert, donc $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé de $E$. □

**Remarque.** Une partie de $E$ peut être à la fois ouverte et fermée.

**Remarque.** Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés. En effet, leur complémentaire est une réunion d'intervalles ouverts.

**Remarque.** Une réunion d'un nombre infini de fermés n'est pas toujours un fermé.

***Démonstration.***
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ est un fermé mais
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}] = ]-1,1[$ n'est pas un fermé car $\mathbb{R}\setminus ]-1,1[ \notin \mathcal{V}(1)$. □

**Remarque.** Il existe des parties de $E$ qui ne sont ni fermées ni ouvertes. Par exemple, $[0,1[$ n'est ni un ouvert de $\mathbb{R}$, ni un fermé de $\mathbb{R}$.

**Propriété.** Les boules fermées (donc en particulier les singletons) sont des fermés.

***Démonstration.***
Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+$. Soit $x \in E \setminus B_f(a,r)$. Posons $\alpha = d(a,x) - r > 0$ et montrons que $B_o(x,\alpha) \subset [E \setminus B_f(a,r)]$.
En effet, si $y \in B_o(x,\alpha)$, $d(a,y) \geq d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - \alpha = r$, donc
$y \in E \setminus B_f(a,r)$.
Ainsi $E \setminus B_f(a,r)$ est un voisinage de $x$, pour tout $x \in E \setminus B_f(a,r)$. Donc $E \setminus B_f(a,r)$ est un ouvert et $B_f(a,r)$ est un fermé de $E$. □

**Corollaire.** Toute partie de $E$ de cardinal fini est un fermé de $E$.

***Démonstration.***
C'est une réunion finie de singletons. □

## 1.2 Adhérence et intérieur

**Définition.** Soient $a \in E$ et $A$ une partie de $E$. On dit que $a$ est un point intérieur de $A$ si et seulement si $A \in \mathcal{V}(a)$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de $A$.

Ainsi, pour tout $a \in E$, $\boxed{a \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(a)}$.

**Remarque.** Intuitivement, $\overset{\circ}{A} = A \setminus Fr(A)$, propriété que nous démontrerons effectivement plus loin.

**Exemples.** Dans $\mathbb{R}$, l'intérieur de $[a,b]$ est $]a,b[$, l'intérieur de $[a,+\infty[$ est $]a,+\infty[$ et l'intérieur de $\mathbb{Q}$ est $\emptyset$.
Dans $E$, $\overset{\circ}{E} = E$ et $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $E$. $\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans $A$. C'est le plus grand ouvert inclus dans $A$.

***Démonstration.***
- Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts inclus dans $A$ et $B = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$.

Si $x \in B$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $x \in U$. $U$ est un ouvert, donc il est voisinage de chacun de ses points. En particulier, $U \in \mathcal{V}(x)$, mais $U \subset A$, donc $A \in \mathcal{V}(x)$ et $x \in \overset{\circ}{A}$.

Ainsi $B \subset \overset{\circ}{A}$.

• Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B_o(x,r) \subset A$. $B_o(x,r) \in \mathcal{U}$, donc $x \in B$. Ainsi $\overset{\circ}{A} \subset B$.

• En tant que réunion d'ouverts inclus dans $A$, $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans $A$. De plus, si $C$ est un ouvert contenu dans $A$, $C \in \mathcal{U}$, donc $C \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \overset{\circ}{A}$. Ainsi $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A$. □

**Propriété.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

◇ $\overset{\circ}{A} \subset A$,

◇ $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si $A$ est un ouvert,

◇ $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,

◇ $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et

◇ $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

***Démonstration.***
Les trois premières propriétés sont simples à établir.

◇ Supposons que $A \subset B$. $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans $A$ donc dans $B$ et $\overset{\circ}{B}$ est le plus grand ouvert contenu dans $B$, donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

◇ $A \cap B \subset A$ donc $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$. De même, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B}$, donc $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

De plus, $\overset{\circ}{A} \subset A$ et $\overset{\circ}{B} \subset B$, donc $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B$, puis $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$. □

**Remarque.** $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ mais la réciproque est fausse.

***Démonstration.***
$A \subset A \cup B$, donc $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. De même, $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$.

Dans $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$, mais $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}} = \mathbb{R}$, donc l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie. □

**Définition.** Soient $a \in E$ et $A$ une partie de $E$. On dit que $a$ est un point adhérent de $A$ si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap A \neq \emptyset$.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de $A$. $\overline{A}$ est appelée l'adhérence de $A$.
Ainsi, pour tout $a \in E$, $\boxed{a \in \overline{A} \Longleftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(a) \ \ V \cap A \neq \emptyset]}$ .

**Remarque.** Intuitivement, $\overline{A} = A \cup Fr(A)$, propriété que nous démontrerons effectivement plus loin.

**Exemples.** Dans $\mathbb{R}$, l'adhérence de $]a, b]$ est $[a, b]$, l'adhérence de $]a, +\infty[$ est $[a, +\infty[$ et l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.
Dans $E$, $\overline{E} = E$ et $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

**Remarque.** $\overline{\mathbb{R}}$ désigne tantôt l'adhérence de $\mathbb{R}$ et est alors égal à $\mathbb{R}$, tantôt la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Seul le contexte permet de déterminer dans quel cas on est placé.
**Remarque de la remarque :** En fait, $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est bien l'adhérence de $\mathbb{R}$, et c'est d'ailleurs l'explication de cette notation $\overline{\mathbb{R}}$, mais dans un contexte d'espace métrique qui n'est pas au programme :
notons temporairement $A = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Convenons que $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ et que $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$.
Pour tout $x, y \in A$, posons $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.
On vérifie facilement que $d$ est une distance sur $A$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $x = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{R}$. Alors $d(+\infty, x) = |\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2})| = \frac{\varepsilon}{2}$, donc $x \in B_o(+\infty, \varepsilon)$. Ceci prouve que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B_o(+\infty, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, donc $+\infty$ appartient à l'adhérence de $\mathbb{R}$, que l'on désigne ici par $\overline{\mathbb{R}}$. De même, on montre que $-\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. Or $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$, donc $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, mais bien sûr, $\overline{\mathbb{R}} \subset A$, donc on peut écrire que $A = \overline{\mathbb{R}}$.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $E$. $E \setminus \overline{A} = \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

***Démonstration.***
Soit $x \in E$. $x \in E \setminus \overline{A} \iff x \notin \overline{A} \iff (\exists V \in \mathcal{V}(x) \;\; V \cap A = \emptyset)$, donc

$x \in E \setminus \overline{A} \iff (\exists V \in \mathcal{V}(x) \;\; V \subset E \setminus A) \iff x \in \overbrace{E \setminus A}^{\circ}$.

En appliquant cette propriété au complémentaire de $A$, on en déduit que

$E \setminus \overline{E \setminus A} = \overbrace{E \setminus (E \setminus A)}^{\circ} = \overset{\circ}{A}$, donc $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$. □

**Corollaire.** Soit $A$ une partie de $E$.
$\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant $A$. C'est le plus petit fermé contenant $A$.

***Démonstration.***
Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés contenant $A$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts inclus dans $E \setminus A$. Les applications $\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ F & \longmapsto & E \setminus F \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ U & \longmapsto & E \setminus U \end{array}$ sont réciproques l'une de l'autre, et donc ces applications sont bijectives. On peut donc effectuer le changement de variable $F = E \setminus U$.

$$\overline{A} = \overline{E \setminus (E \setminus A)} = E \setminus \overbrace{E \setminus A}^{\circ} = E \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} (E \setminus U) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

En tant qu'intersection de fermés contenant $A$, $\overline{A}$ est un fermé contenant $A$. De plus, si $G$ est un fermé contenant $A$, $G \in \mathcal{F}$, donc $\overline{A} \subset G$. Ainsi $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$. □

**Propriété.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$.

$$\begin{array}{ll}
\diamond \ \overline{A} & \supset A, \\
\diamond \ \overline{A} & = A \text{ si et seulement si } A \text{ est un fermé,} \\
\diamond \ \overline{\overline{A}} & = \overline{A}, \\
\diamond \ A \subset B & \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B} \text{ et} \\
\diamond \ \overline{A \cup B} & = \overline{A} \cup \overline{B}.
\end{array}$$

***Démonstration.***
Les trois premières propriétés sont simples à établir.
◇ Supposons que $A \subset B$. $\overline{B}$ est un fermé contenant $B$ donc $A$ et $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant $A$, donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.
◇ $A \cup B \supset A$ donc $\overline{A \cup B} \supset \overline{A}$. De même, $\overline{A \cup B} \supset \overline{B}$, donc $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$.
De plus, $\overline{A} \supset A$ et $\overline{B} \supset B$, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \supset A \cup B$, puis $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$. □

**Remarque.** $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$ mais la réciproque est fausse.

***Démonstration.***
$A \supset A \cap B$, donc $\overline{A} \supset \overline{A \cap B}$. De même, $\overline{B} \supset \overline{A \cap B}$, donc $\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$.
Dans $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, mais $\overline{\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \emptyset$, donc l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie. □

**Propriété (hors programme) :** Soit $(x_n)$ une suite de points de $E$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $X_N = \{x_n / n \geq N\}$.
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)$ est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$.
En particulier, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)$ est un fermé.

***Démonstration.***
$a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$ si et seulement si
(1) : $\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ \ d(x_n, a) < \varepsilon$, or

$$\begin{array}{ll}
(1) & \Longleftrightarrow \forall N \in \mathbb{N} \ \forall \varepsilon > 0 \ \ X_N \cap B_o(a, \varepsilon) \neq \emptyset \\
 & \Longleftrightarrow \forall N \in \mathbb{N} \ \forall V \in \mathcal{V}(a) \ \ X_N \cap V \neq \emptyset \\
 & \Longleftrightarrow \forall N \in \mathbb{N} \ \ a \in \overline{X_N}
\end{array}$$

Ainsi, $a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$ si et seulement si $a \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$. □

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$. Soit $x \in A$.
On dit que $x$ est isolé dans $A$ si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$. Soit $x \in E$.
On dit que $x$ est un point d'accumulation de $A$ si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

**Propriété.** Soient $A$ une partie non vide de $E$ et $a \in E$. Alors $d(a, A) = 0 \iff a \in \overline{A}$. Ainsi les points adhérents de $A$ sont les points de $E$ situés à une distance nulle de $A$.

***Démonstration.***
$a \in \overline{A} \iff (\forall V \in \mathcal{V}(a) \;\; V \cap A \neq \emptyset) \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; B_o(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset)$,
donc $a \in \overline{A} \iff (\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists x \in A \;\; d(a, x) < \varepsilon) \iff \inf\{d(x, a)/x \in A\} = 0$.
Ainsi $a \in \overline{A} \iff d(a, A) = 0$. □

**Remarque.** On a vu lors de la présentation de l'ensemble des réels (Logique et vocabulaire ensembliste, paragraphe 7.3.7) qu'une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x < a < y$. On souhaite adapter cette définition à une partie d'un espace métrique quelconque.

**Propriété.** Une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ rencontre toutes les boules ouvertes de $\mathbb{R}$.

***Démonstration.***
Notons $\mathcal{I} = \{]x, y[/x < y\}$ : $\mathcal{I}$ désigne donc l'ensemble des intervalles ouverts, non vides, et bornés de $\mathbb{R}$. D'après la remarque précédente, $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ rencontre tous les éléments de $\mathcal{I}$.
Notons $\mathcal{B} = \{B_o(c, r)/c \in \mathbb{R}, \;\; r \in \mathbb{R}_+^*\}$ :
$\mathcal{B}$ désigne l'ensemble des boules ouvertes de $\mathbb{R}$. $\mathcal{B} = \{]c - r, c + r[/c \in \mathbb{R}, \;\; r \in \mathbb{R}_+^*\}$, donc $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$. Mais réciproquement, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, $]x, y[= B_o(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$, donc $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$. Ainsi $\mathcal{I} = \mathcal{B}$ et $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ rencontre tous les éléments de $\mathcal{B}$, ce qu'il fallait démontrer □

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$.
$A$ est dense dans $E$ si et seulement si $A$ rencontre toutes les boules ouvertes de $E$.

**Propriété.** Une partie $A$ de $E$ est dense dans $E$ si et seulement si $\overline{A} = E$.

***Démonstration.***
Supposons que $\overline{A} = E$ et soit $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. $a \in E = \overline{A}$ et $B_o(a, r) \in \mathcal{V}(a)$, donc $B_o(a, r) \cap A \neq \emptyset$. Ainsi, $A$ rencontre toutes les boules ouvertes.
Réciproquement, supposons que $A$ rencontre toutes les boules ouvertes de $E$. Soient $a \in E$ et $V \in \mathcal{V}(a)$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset V$, or $A \cap B_o(a, r) \neq \emptyset$, donc $V \cap A \neq \emptyset$. Ainsi, $a \in \overline{A}$ pour tout $a \in E$, donc $\overline{A} = E$. □

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$.
La frontière de $A$ est $\boxed{Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})}$.

**Propriété.** La frontière d'une partie de $E$ est toujours fermée.

***Démonstration.***
$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$ est une intersection de deux fermés. □

**Exemple.** Dans $\mathbb{R}$, $Fr([a, b[) = \{a, b\}$, $Fr(\mathbb{R}) = \emptyset$ et $Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $E$. $[A \setminus Fr(A)] = \mathring{A} \subset A \subset \overline{A} = [A \cup Fr(A)]$.

***Démonstration.***

$\diamond$ Soit $x \in A \setminus Fr(A)$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, donc $x \in Fr(A)$, ce qui est faux. Ainsi $x \in \overset{\circ}{A}$, ce qui prouve que $A \setminus Fr(A) \subset \overset{\circ}{A}$.

Réciproquement, supposons que $x \in \overset{\circ}{A}$. Si $x \in Fr(A)$, $x \notin \overset{\circ}{A}$, donc $x \in A \setminus Fr(A)$. Ainsi, $[A \setminus Fr(A)] = \overset{\circ}{A}$.

$\diamond$ Soit $x \in \overline{A}$. Si $x \notin A$, $x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = Fr(A)$, donc, dans tous les cas, $x \in A \cup Fr(A)$.
Réciproquement, supposons que $x \in A \cup Fr(A)$. Si $x \in A$ alors $x \in \overline{A}$.
Si $x \in Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, on a aussi $x \in \overline{A}$, donc dans tous les cas, $x \in \overline{A}$, ce qui prouve que $\overline{A} = [A \cup Fr(A)]$. $\square$

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $E$.
$A$ est ouvert si et seulement si $A \cap Fr(A) = \emptyset$.
$A$ est fermé si et seulement si $Fr(A) \subset A$.

***Démonstration.***

$\diamond$ Si $A$ est ouvert, $\overset{\circ}{A} = A$, donc $Fr(A) \cap A = (\overline{A} \setminus A) \cap A = \emptyset$.

Réciproquement, supposons que $Fr(A) \cap A = \emptyset$. Alors $\overset{\circ}{A} = A \setminus Fr(A) = A$, donc $A$ est ouvert.
$\diamond$ Si $A$ est fermé, $Fr(A) \subset Fr(A) \cup A = \overline{A} = A$.
Réciproquement si $Fr(A) \subset A$, $\overline{A} = A \cup Fr(A) = A$, donc $A$ est fermé. $\square$

**Remarque.** Toutes ces notions sont définies uniquement à l'aide de la notion de voisinages, donc lorsque $E$ est un espace vectoriel normé, elles restent inchangées si on change la norme de $E$ par une norme équivalente.

## 1.3 Caractérisation par les suites

**Propriété.** Soient $A$ une partie de $E$ et $a \in E$.
$\boxed{a \in \overline{A} \text{ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } a.}$

***Démonstration.***

$\diamond$ Supposons que $a \in \overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in A \cap B_o(a, \frac{1}{n})$. Ainsi $(x_n)$ est une suite d'éléments de $A$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ car $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\diamond$ Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $A$ tels que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $V \in \mathcal{V}(a)$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(a, \varepsilon) \subset V$. $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < \varepsilon$. En particulier, $x_N \in A \cap B_o(a, \varepsilon)$, donc $V \cap A \neq \emptyset$, ce qui prouve que $a \in \overline{A}$. $\square$

**Corollaire.** $A$ est dense dans $E$ si et seulement si pour tout $l \in E$, il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

**Exercice.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$.
Montrer que $d(\overline{A}, \overline{B}) = d(A, B)$.

***Résolution.***

• $\{d(a,b)/(a,b) \in A \times B\} \subset \{d(\alpha,\beta)/(\alpha,\beta) \in \overline{A} \times \overline{B}\}$, donc

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf(\{d(a,b)/(a,b) \in A \times B\}) \\ &\geq \inf(\{d(\alpha,\beta)/(\alpha,\beta) \in \overline{A} \times \overline{B}\}) = d(\overline{A}, \overline{B}). \end{aligned}$$

• Soit $(\alpha, \beta) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telles que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n) \in A \times B$, donc $d(a_n, b_n) \geq d(A, B)$, or $d(a_n, b_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(\alpha, \beta)$. En effet,

$$\begin{aligned} |d(\alpha,\beta) - d(a_n,b_n)| &\leq |d(\alpha,\beta) - d(\alpha,b_n)| + |d(\alpha,b_n) - d(a_n,b_n)| \\ &\leq d(\beta,b_n) + d(\alpha,a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(remarque : lorsque $d$ est associée à une norme $\|.\|$, seul cas au programme, il est plus simple d'écrire que
$|d(\alpha,\beta) - d(a_n,b_n)| = |\|\alpha-\beta\| - \|a_n - b_n\|| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\|\alpha-\beta\| - \|\alpha-\beta\|| = 0$, d'après les théorèmes usuels sur les suites de vecteurs.)
Ainsi, $d(\alpha,\beta) \geq d(A,B)$, pour tout $(\alpha,\beta) \in \overline{A} \times \overline{B}$, ce qui prouve que $d(\overline{A}, \overline{B}) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)\in\overline{A}\times\overline{B}} d(\alpha,\beta) \geq d(A,B)$.

**Propriété.**

$\boxed{\text{$A$ est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de $A$ a pour limite un élément de $A$.}}$

***Démonstration.***

• Supposons que $A$ est fermé et soit $(a_n)$ une suite convergente d'éléments de $A$. Notons $a$ sa limite. $a \in \overline{A}$ et $\overline{A} = A$, donc $a \in A$.

• Réciproquement, on suppose que toute suite convergente d'éléments de $A$ a pour limite un élément de $A$. Soit $a \in \overline{A}$. Il existe une suite $(a_n)$ de $A$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. D'après l'hypothèse, $a \in A$, donc $\overline{A} \subset A$, ce qui montre que $A$ est fermé. □

**Exemple.** Montrons que toute droite de $\mathbb{C}$ est fermée :
Soit $D$ une droite de $\mathbb{C}$. Il existe $a_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $D = a_0 + \mathbb{R}e^{i\theta}$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in D \iff e^{-i\theta}(z - a_0) \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z - a_0)) = 0$.
Soit $(z_n) \in D^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $D$ telle que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z \in \mathbb{C}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z_n - a_0)) = 0$, or d'après le cours, $\mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z_n - a_0)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z - a_0))$, donc $\mathrm{Im}(e^{-i\theta}(z - a_0)) = 0$ ce qui montre que $z \in D$. D'après la caractérisation des fermés, $D$ est bien un fermé.

**Exemple.** En adaptant le raisonnement,
montrer que $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 - \sin(zy) \geq y^3\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

**Propriété.** Soit $G$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie.
Tout sous-espace vectoriel de $G$ de dimension finie est fermé.

***Démonstration.***
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $G$ de dimension finie.
Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $F$ qui converge vers $l \in G$.
En tant que suite convergente de $G$, $(x_n)$ est une suite de Cauchy de $G$, donc c'est une suite de Cauchy de $F$, mais $F$ est de dimension finie, donc $F$ est complet, ce qui prouve que la suite $(x_n)$ converge dans $F$, donc $l \in F$. Ainsi $F$ est fermé. $\square$

## 1.4 Topologie induite sur une partie

Soit $A$ une partie de $E$. On a déjà vu qu'alors $(A, d|_{A^2})$ est un espace métrique.
On a également vu que la topologie d'un espace métrique est l'ensemble de ses ouverts. Par extension, la *topologie* d'un espace métrique désigne tout ce qui concerne ses ouverts, fermés, adhérences, intérieurs etc.
Dans ce contexte, on parle de la topologie "induite" sur $A$ par la topologie "globale" de $E$, ou encore de la topologie relative à $A$. On dispose ainsi des voisinages, ouverts, fermés, intérieurs, adhérences, frontières et ensembles denses pour la topologie induite (on parle de voisinages relatifs à $A$, ouverts relatifs etc.).

**Propriété.** Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur $A$ sont les traces sur $A$ des boules centrées dans $A$, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de $E$.

***Démonstration.***
• Soit $(a, r) \in A \times \mathbb{R}_+^*$. La boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ pour la topologie induite est $B_o^A(a, r) = \{x \in A / d(a, x) < r\} = B_o^E(a, r) \cap A$.
La démonstration est identique pour les boules fermées.
• Soit $U_A$ un ouvert pour la topologie induite sur $A$. C'est une réunion de boules ouvertes de la forme $B_o^A(a, r)$ où $(a, r) \in A \times \mathbb{R}_+^*$. Donc $U_A$ est de la forme
$\displaystyle\bigcup_{i \in I} B_o^A(a_i, r_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_o^E(a_i, r_i)\right) = A \cap U$ où $U$ est un ouvert de $E$.
Réciproquement, soit $U$ un ouvert pour la topologie globale de $E$. Soit $a \in U \cap A$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset U$, donc $B_o^A(a, r) \subset U \cap A$. Ainsi, pour la topologie induite sur $A$, $U \cap A$ est voisinage de chacun de ses points, donc est un ouvert.
• Soit $F_A$ une partie de $A$. $F_A$ est un fermé pour la topologie induite si et seulement si $A \setminus F_A$ est un ouvert pour la topologie induite, donc si et seulement s'il existe un ouvert $U$ pour la topologie globale tel que $A \setminus F_A = A \cap U$. Ainsi $F_A$ est un fermé pour la topologie induite si et seulement s'il existe un ouvert $U$ pour la topologie globale tel que $F_A = A \setminus (A \cap U) = (E \setminus U) \cap A$. Donc les fermés pour la topologie induite sont les traces sur $A$ des fermés pour la topologie globale.
• Soient $V$ une partie de $A$ et $a \in A$.
Supposons que $V \in \mathcal{V}^A(a)$. Posons $W = V \cup (E \setminus A)$. Ainsi $V = W \cap A$.

Il existe $r > 0$ tel que $B_o^E(a,r) \cap A = B_o^A(a,r) \subset V$. Ainsi $B_o^E(a,r) \subset W$ et $W \in \mathcal{V}^E(a)$. Donc $V = W \cap A$ est la trace sur $A$ d'un voisinage de $a$ pour la topologie globale.
Réciproquement, supposons que $V$ est la trace sur $A$ d'un voisinage de $a$ pour la topologie globale. Ainsi $V = W \cap A$ où $W \in \mathcal{V}^E(a)$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o^E(a,r) \subset W$. Alors $B_o^A(a,r) = B_o^E(a,r) \cap A \subset W \cap A = V$, ce qui prouve que $V \in \mathcal{V}^A(a)$. □

**Propriété.** Si $B$ est une partie de $A$, l'adhérence de $B$ pour la topologie induite sur $A$ est la trace sur $A$ de l'adhérence de $B$ pour la topologie globale sur $E$.

***Démonstration.***
Soit $a \in A$.
$a \in \overline{B}^A \iff (\forall V \in \mathcal{V}^A(a) \ \ V \cap B \neq \emptyset) \iff (\forall W \in \mathcal{V}^E(a) \ \ W \cap A \cap B \neq \emptyset)$,
or $B \subset A$, donc $A \cap B = B$. Ainsi $a \in \overline{B}^A \iff a \in \overline{B}^E$, ce qui montre que $\overline{B}^A = A \cap \overline{B}^E$.
□

**Remarque.** L'intérieur et la frontière pour la topologie induite sur $A$ ne correspondent pas aux traces sur $A$ des intérieur et frontière pour la topologie globale de $E$.

***Démonstration.***
Prenons $B = A = [a,b]$. $B = ]a-1, b+1[ \cap A$ est un ouvert de $A$, donc $\overset{\circ}{B}{}^A = A = [a,b]$,
mais $A \cap \overset{\circ}{B}{}^E = ]a,b[$.
Avec le même exemple, $Fr^A(B) = \emptyset$ mais $A \cap Fr^E(B) = \{a,b\}$. □

**Propriété.** Soit $B$ une partie de $A$. $\boxed{B \text{ est dense dans } A \text{ si et seulement si } A \subset \overline{B}}$ .

***Démonstration.***
$B$ est dense dans $A$ si et seulement si $\overline{B}^E \cap A = \overline{B}^A = A$, donc si et seulement si $A \subset \overline{B}^E$. □

## 1.5 Les compacts

**Définition.** Soit $A$ une partie de $E$.
$\boxed{\begin{array}{l}A \text{ est compacte si et seulement si} \\ \text{toute suite d'éléments de } A \text{ admet au moins une valeur d'adhérence dans } A.\end{array}}$

**Remarque.** Lorsque $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, si $N$ et $N'$ sont deux normes équivalentes sur $E$, alors une partie de $E$ est compacte pour $N$ si et seulement si elle est compacte pour $N'$.

**Propriété.** Tout compact de $E$ est fermé et borné.

***Démonstration.***
- Soit $A$ un compact de $E$. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in E$. $A$ étant compact, $(x_n)$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $A$, or $x$ est l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)$, donc $x \in A$. Ainsi $A$ est fermé.
- Il existe $e \in E$. Supposons que $A$ n'est pas borné. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(e, x_n) \geq n$. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante,

$d(e, x_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi la suite $(x_{\varphi(n)})$ n'est pas bornée donc ne converge pas. Ainsi la suite $(x_n)$ n'admet aucune valeur d'adhérence, ce qui est faux. On en déduit que $A$ est borné. □

**Théorème.** La réciproque est vraie en dimension finie : si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les compacts de $E$ sont exactement ses fermés bornés.

***Démonstration.***
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $A$ une partie fermée bornée de $E$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$.
$A$ est bornée, donc $(x_n)$ est une suite bornée de $E$ donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une valeur d'adhérence $a \in E$. Il existe une extraction $(x_{\varphi(n)})$ de $(x_n)$ qui converge vers $a$, mais $(x_{\varphi(n)}) \in A^{\mathbb{N}}$ et $A$ est fermé, donc $a \in A$. □

**Remarque.** Pour le moment, ce théorème ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass sont démontrés uniquement lorsque sur $E$, on utilise la norme $N$ définie par : si $y = \sum_{i=1}^{q} y_i e_i \in E$, alors $N(y) = \sum_{i=1}^{q} |y_i|$, où $e = (e_1, \ldots, e_q)$ est une base de $E$.
Nous démontrerons page 40 que sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc ces théorèmes sont vrais pour toute norme de $E$.
Cependant, pour démontrer que toutes les normes sont équivalentes sur un espace $E$ de dimension finie, nous utiliserons que dans $E$ les fermés bornés sont compacts, mais seulement pour la norme $N$ : il n'y aura donc pas de cercle vicieux.

**Propriété.** Soit $A$ un compact de $E$.
Lorsque $B \subset A$, $B$ est compact si et seulement s'il est fermé.

***Démonstration.***
Supposons que $B$ est compact. Alors il est fermé d'après la propriété précédente.
Réciproquement, supposons que $B$ est fermé. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $B$. C'est aussi une suite d'éléments de $A$ qui est compact, donc il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge dans $A$.
Mais $(x_{\varphi(n)}) \in B^{\mathbb{N}}$ et $B$ est un fermé, donc $(x_{\varphi(n)})$ converge dans $B$. Ainsi la suite $(x_n)$ admet une valeur d'adhérence dans $B$, ce qui prouve que $B$ est compact. □

**Théorème.** Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

***Démonstration.***
On sait déjà que lorsqu'une suite converge, sa limite est son unique valeur d'adhérence.
Réciproquement considérons une suite $(x_n)$ d'une partie compacte $K$ de $E$. On suppose que $(x_n)$ possède une unique valeur d'adhérence $a$ mais que $x_n$ ne converge pas vers $a$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $d(x_n, a) > \varepsilon$. Ainsi, l'ensemble $M = \{n \in \mathbb{N} \ / \ d(x_n, a) > \varepsilon\}$ n'est pas majoré, donc c'est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D'après le cours, il existe une unique bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $M$, que l'on notera $\varphi$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, a) > \varepsilon$. Or la suite

extraite $(x_{\varphi(n)})$ est à valeurs dans $K$ qui est compact, donc il existe $b \in K$ et une application $\Psi$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(\Psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b$. Alors $b$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$ donc d'après l'unicité, $b = a$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(\Psi(n))}, a) > \varepsilon$, donc en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ (cf l'exercice en début de la page 11), on obtient $d(b, a) \geq \varepsilon$, ce qui est faux car $a = b$. Ceci prouve par l'absurde que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. $\square$

**Théorème.** On suppose que $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si $A$ et $B$ sont des compacts de $E$ et de $F$, alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.

***Démonstration.***
Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$. $A$ est compact, donc il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante et $x \in A$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
$(y_{\varphi(n)}) \in B^{\mathbb{N}}$ et $B$ est compact, donc il existe une application $\Psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante et $y \in B$ tels que $y_{\varphi(\Psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} y$. De plus, par composition des limites, $x_{\varphi(\Psi(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Ainsi $(x_{\varphi \circ \Psi(n)}, y_{\varphi \circ \Psi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (x, y) \in A \times B$, ce qui prouve que $A \times B$ est un compact de $E \times F$. $\square$

**Corollaire.** Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_p$ $p$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels norméset $A_1, \ldots, A_p$ $p$ compacts respectivement dans $E_1, \ldots, E_p$. Alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$.

***Démonstration.***
Se démontre par récurrence sur $p$. $\square$

**Théorème (hors programme) : Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue.**
Soit $A$ une partie de $E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) $A$ est compact.
ii) Pour tout ensemble $I$ et pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe une partie $J$ finie de $I$ telle que $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.
C'est la propriété de Borel Lebesgue, qui signifie que, de tout recouvrement de $A$ par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
iii) Pour tout ensemble $I$ et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i \in I}$ telle que $A \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie $J$ finie de $I$ telle que $A \cap \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

***Démonstration.***
Par passage au complémentaire, $ii) \Longleftrightarrow iii)$.
- Supposons $iii)$ et montrons $i)$.

Soit $(x_n)$ une suite de points de $A$. Supposons qu'elle n'admet aucune valeur d'adhérence dans $A$. Ainsi, avec les notations de la propriété précédente,

$A \cap \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{X_N} = \emptyset$, donc d'après iii), il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A \cap \bigcap_{0\le N\le p} \overline{X_N} = \emptyset$. Mais la suite $(X_N)$ est décroissante au sens de l'inclusion, donc $\bigcap_{0\le N\le p} \overline{X_N} = \overline{X_p}$. Ainsi, $A \cap X_p = \emptyset$, ce qui est faux.

• $i) \Longrightarrow ii)$ : On suppose que $A$ est compact. Si $A$ est vide, la propriété $ii)$ est vraie (en prenant $J = \emptyset$), donc on peut supposer que $A$ est non vide pour la suite.

⋄ **Lemme de précompacité :** Montrons d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, $A$ est recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{1\le i\le n} B_o(x_i, \varepsilon)$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde, en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x_1, \ldots, x_n \in A$, $A \not\subset \bigcup_{1\le i\le n} B_o(x_i, \varepsilon)$.

$A$ étant non vide, il existe $x_0 \in A$. Or $A \not\subset B_o(x_0, \varepsilon)$, donc il existe $x_1 \in A \setminus B_o(x_0, \varepsilon)$. Ainsi, $d(x_0, x_1) > \varepsilon$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $x_0, \ldots, x_p \in A$ tels que, pour $i, j \in \{0, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$, $d(x_i, x_j) > \varepsilon$. D'après l'hypothèse, $A \not\subset \bigcup_{0\le i\le p} B_o(x_i, \varepsilon)$, donc il existe $x_{p+1} \in A \setminus \bigcup_{0\le i\le p} B_o(x_i, \varepsilon)$. Alors, pour tout $i, j \in \{0, \ldots, p+1\}$ avec $i \neq j$, $d(x_i, x_j) > \varepsilon$.

Par récurrence, on a ainsi construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $A$ telle que, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, $d(x_i, x_j) > \varepsilon$.

$A$ étant supposé compact, il existe $a \in A$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) > \varepsilon$, donc en faisant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient $d(a, a) \ge \varepsilon$, ce qui est faux.

Ceci démontre le lemme de précompacité.

⋄ Soit maintenant un ensemble $I$ et une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

On souhaite déjà montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, il existe $i_x \in I$ tel que $B_o(x, \varepsilon) \subset U_{i_x}$. Pour cela, on raisonne à nouveau par l'absurde en supposant que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in A$ tel que, pour tout $i \in I$, $B_o(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset U_i$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in A$ tel que, pour tout $i \in I$, $B_o(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$. $A$ étant compact, il existe $a \in A$ et $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Par récurrence, on sait montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \ge n$.

$a \in A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, donc il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$.

$U_{i_0}$ est un ouvert, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o(a, \alpha) \subset U_{i_0}$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\varphi(N)}, a) < \frac{\alpha}{2}$ avec $N > \frac{2}{\alpha}$. Alors $\frac{1}{\varphi(N)} \le \frac{1}{N} < \frac{\alpha}{2}$.

Pour tout $y \in B_o(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)})$, $d(y, a) \le d(y, x_{\varphi(N)}) + d(x_{\varphi(N)}, a) < \frac{1}{\varphi(N)} + \frac{\alpha}{2} < \alpha$, donc $B_o(x_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)}) \subset B_o(a, \alpha) \subset U_{i_0}$, ce qui est faux.

⋄ On peut maintenant terminer la démonstration : on vient de montrer qu'il existe

$\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in A$, il existe $i_x \in I$ tel que $B_o(x, \varepsilon) \subset U_{i_x}$. D'après le lemme de précompacité, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} B_o(x_j, \varepsilon)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $B_o(x_j, \varepsilon) \subset U_{i_{x_j}}$, donc $A \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} U_{i_{x_j}}$, ce qui conclut. $\square$

**Propriété.** Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons $l$ sa limite.
Alors $\boxed{\text{l'ensemble } \{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\} \text{ est un compact}}$ de $E$.

***Démonstration.***
Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $A = \{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ par des ouverts. Il existe $j \in I$ tel que $l \in U_j$.
$U_j$ est un ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(l, \varepsilon) \subset U_j$. Mais $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $x_n \in B_o(l, \varepsilon)$.
Pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in U_{i_n}$, donc la famille finie d'ouverts $(U_j, U_{i_0}, \ldots, U_{i_{N-1}})$ est un recouvrement de $A$.
Ceci prouve que $A$ est compact. $\square$

**Remarque.** Dans cette démonstration, on a utilisé la caractérisation de Borel Lebesgue, mais seulement dans le sens *ii)* $\Longrightarrow$ *i)*, assez facile à établir.

# 2 Continuité ponctuelle

On fixe deux espaces métriques $E$ et $F$, ainsi qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$, dont le domaine de définition sera noté $\mathcal{D}_f$.

## 2.1 Limite en un point

**Notation.** On fixe une partie $A$ de $\mathcal{D}_f$. On fixe également $a$ et
$\boxed{\text{on suppose qu'il existe au moins une suite } (a_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a.}$
Ainsi, lorsque $a \in E$, ceci signifie que $a \in \overline{A}$.
On envisagera cependant également le cas des limites infinies :
- Si $a = \infty$, on suppose que $A$ n'est pas borné, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$.
- Si $a = +\infty$, on suppose que $E = \mathbb{R}$ et que $A$ n'est pas majorée, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $a = -\infty$, on suppose que $E = \mathbb{R}$ et que $A$ n'est pas minorée, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

On fixe aussi $l$ dans $F \cup \{\infty\}$. Lorsque $F = \mathbb{R}$, on pourra avoir $l = +\infty$ ou $l = -\infty$.

### 2.1.1 Caractérisation séquentielle

**Définition.** $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $a$ en appartenant à $A$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left( x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \right)$.
Dans ce cas, on note $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

**Remarque.** Il s'agit d'une définition "séquentielle" car elle utilise un critère reposant sur des suites.

**Propriété.** Lorsque $E$ et $F$ sont des espaces vectoriels normés, si l'on remplace l'une des normes sur $E$ ou $F$ par une norme équivalente, la condition $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ est inchangée.

**Exemples :**
- En utilisant que $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on montre que $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $\dfrac{1}{x} \underset{\substack{x\to\pm\infty\\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} 0$.
- $\lfloor x \rfloor \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$, car si $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, en utilisant que $\lfloor x_n \rfloor \geq x_n - 1$, le principe des gendarmes prouve que $\lfloor x_n \rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $\sin x$ n'admet pas de limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Sinon, en notant $\ell$ cette limite, on aurait $\sin(n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\ell = 0$ et $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\ell = 1$.

**Propriété. Unicité de la limite.** Si $F = \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l = l'$.
Dans ce cas, on dit que $l$ est la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ en appartenant à $A$ et on note $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

***Démonstration.***
Soit $(l, l') \in F^2$ tel que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$.
Il existe au moins une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $a$. Alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$, donc $l = l'$ en vertu de l'unicité de la limite d'une suite. □

**Remarque.** L'existence d'une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $a$ est une hypothèse nécessaire car sinon, la condition "$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left( x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \right)$" est vraie pour tout $l$.

**Remarque.** lorsque $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} +\infty$, il convient de dire que $f(x)$ diverge vers $+\infty$. On ne parlera de convergence que dans le cas où $l \in F$.

**Propriété.** On suppose que $F = \mathbb{C}$ et que $l \in \mathbb{C}$.
Alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell))$.

***Démonstration.***
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\text{Re}(f)(x_n) = \text{Re}(f(x_n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \text{Re}(\ell)$ d'après le cours sur les suites de vecteurs. C'est vrai pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $\text{Re}(f)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \text{Re}(\ell)$. De même on montre que $\text{Im}(f)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \text{Im}(\ell)$.
Réciproquement, supposons que $(\text{Re}(f)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \text{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\text{Im}(f)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \text{Im}(\ell))$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $\text{Re}(f)(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \text{Re}(\ell)$ et $\text{Im}(f)(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \text{Im}(\ell)$, donc $f(x_n) = \ell$ d'après le cours sur les suites de vecteurs. C'est vrai pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \ell$. $\square$

**Propriété.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathcal{D}_f$ telles que $A \subset B$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in B}}{\longrightarrow} l$, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.

***Démonstration.***
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in B}}{\longrightarrow} l$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
$A \subset B$, donc $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$. Or $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in B}}{\longrightarrow} l$, donc $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Ainsi $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$. $\square$

### 2.1.2 Caractérisation par "$\varepsilon$"

**Propriété.** On suppose que $a \in E$ et que $l \in F$.
$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \ \forall x \in A \ \ (d(x,a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.

***Démonstration.***
• Supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \ \forall x \in A \ \ (d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d(f(x), l) < \varepsilon)$.
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que
$\forall x \in A \ \ (d(x,a) < \alpha \Longrightarrow d(f(x), l) < \varepsilon)$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ $d(x_n, a) < \alpha$.
Ainsi, pour tout $n \geq N$ $d(f(x_n), l) < \varepsilon$. Donc $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

• Pour démontrer la réciproque, établissons sa contraposée. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in A$ tel que $d(x,a) < \alpha$ et $d(f(x), l) \geq \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, a) < \dfrac{1}{n+1}$ et $d(f(x_n), l) \geq \varepsilon$.
$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ car $d(x_n, a) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. D'autre part, la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers $l$ car $(d(f(x_n), l))$ ne converge pas vers 0. $\square$

**Remarque.** Dans (1), on peut prendre les deux dernières inégalités indifféremment strictes ou larges.

**Propriété.** On peut adapter cette caractérisation (ainsi que sa démonstration) dans le cas où $a$ et $l$ sont éventuellement infinis. On obtient par exemple :

— Si $l \in F$ et $E = \mathbb{R}$,
$f(x) \underset{\substack{x \to +\infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists M \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (x \geq M \Longrightarrow d(f(x), l) < \varepsilon)$.

— Si $a \in E$ et $F = \mathbb{R}$,
$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq M)$.

— Si $a = \infty$ et $l \in F$, en choisissant $e_0 \in E$,
$f(x) \underset{\substack{x \to \infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists M \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x, e_0) \geq M \Longrightarrow d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.

— Si $a = \infty$ et $l = \infty$, en fixant $e_0 \in E$ et $f_0 \in F$, $f(x) \underset{\substack{x \to \infty \\ x \in A}}{\longrightarrow} \infty$ si et seulement si
$\forall M \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ \ (d(x, e_0) \geq N \Longrightarrow d(f(x), f_0) \geq M)$.

**Remarque.** Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ peut être vue comme la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$, définie sur $\mathbb{N}$ qui est une partie non majorée de $\mathbb{R}$. La notion de limite d'une suite dans un espace métrique devient donc un cas particulier de la notion de limite d'une fonction en $+\infty$.

### 2.1.3 Caractérisation par voisinages

**Définition.** Dans $\mathbb{R}$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie contenant un intervalle $]c, +\infty[$ où $c \in \mathbb{R}$ et voisinage de $-\infty$ toute partie contenant un intervalle $]-\infty, c[$. Ainsi $\mathcal{V}(+\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R} \ \ ]c, +\infty[ \subset V\}$ et $\mathcal{V}(-\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R} \ \ ]-\infty, c[ \subset V\}$.

**Définition.** Si $E$ est non borné, on appelle voisinage de $\infty$ toute partie contenant le complémentaire d'une boule fermée centrée en l'origine.
Ainsi $\mathcal{V}(\infty) = \{V \subset E \ / \ \exists R > 0 \ \ E \setminus B_f(e, R) \subset V\}$, où $e \in E$ : on peut montrer (exercice) que cet ensemble ne dépend pas de $e$.

**Propriété.** Avec les définitions précédentes de voisinages, on a encore :
Une intersection de deux voisinages de $a$ est un voisinage $a$.
Toute partie contenant un voisinage de $a$ est un voisinage de $a$.

**Remarque.**
Avec ces nouvelles définitions, les hypothèses portant sur $a$ et $A$ énoncées au début du présent paragraphe se résument ainsi : $\boxed{\text{tout voisinage } V \text{ de } a \text{ rencontre } A}$ .

**Définition.** On dit que $f|_A$ est bornée au voisinage de $a$ si et seulement s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f|_{V \cap A}$ est bornée.
Plus généralement, on dit que $f|_A$ vérifie une certaine propriété au voisinage de $a$ si et seulement s'il existe un voisinage $V$ de $a$ tel que $f|_{V \cap A}$ vérifie cette propriété.
Lorsqu'on énonce une propriété portant sur $f$ au voisinage de $a \in E$, on dit que c'est une propriété locale (de $f$ au voisinage de $a$).
Lorsqu'on énonce une propriété portant sur $f$ au voisinage de $\infty$ ou de $\pm\infty$, on dit que c'est une propriété asymptotique.

**Exemples :**

— $x \longmapsto \ln x$ est négative au voisinage de 0.
— sin est croissante au voisinage de 0.
— $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est strictement positive au voisinage de 0.

**Propriété.** $\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \iff \forall V \in \mathcal{V}(l)\ \ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \ f(U \cap A) \subset V}$.

***Démonstration.***
Plaçons-nous dans le cas où $a \in E$ et $l \in F$.

$$\begin{aligned} f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \quad &\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*\ \ \forall x \in E\ \ (x \in B_o(a,\alpha) \cap A \Longrightarrow f(x) \in B_o(l,\varepsilon)) \\ &\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*\ \ f(B_o(a,\alpha) \cap A) \subset B_o(l,\varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \ f(U \cap A) \subset B_o(l,\varepsilon) \\ &\iff \forall V \in \mathcal{V}(l)\ \ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \ f(U \cap A) \subset V. \end{aligned}.$$

Cette démonstration s'adapte aux différents cas de limites infinies, avec les définitions précédentes des voisinages de $\infty$ dans $E$ et de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$. □

**Propriété. Caractère local (ou asymptotique) de la notion de limite**.
Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \iff f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cap U_0}}{\longrightarrow} l$.

Ainsi la valeur de l'éventuelle limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ pour $x$ appartenant à $A$ ne dépend pas du comportement global de $f$ sur $A$ mais seulement du comportement de $f|_A$ au voisinage de $a$. En particulier, si l'on modifie les valeurs de $f(x)$ lorsque $x \notin U_0$, on ne modifie pas la valeur logique de la proposition $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

***Démonstration.***
"$\Longrightarrow$" découle d'une remarque précédente, car $A \supset A \cap U_0$.
Réciproquement, supposons que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cap U_0}}{\longrightarrow} l$.
Soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(U \cap (A \cap U_0)) \subset V$. Ainsi $U \cap U_0 \in \mathcal{V}(a)$ et $f((U \cap U_0) \cap A) \subset V$. On a donc montré que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$. □

**Définition.** Soit $a \in E$ tel que $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$. Ainsi, $a$ est un point d'accumulation de $\mathcal{D}_f$. S'il existe $l \in F$ tel que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in \mathcal{D}_f\setminus\{a\}}}{\longrightarrow} l$, on écrit que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\neq a}}{\longrightarrow} l$ ou même $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.
On note aussi $l = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$, ou même $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. C'est la notion usuelle de limite d'une fonction en un point.

**Propriété.** Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathcal{D}_f$ qui rencontrent tout voisinage de $a$. Alors, $(f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l) \iff f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A\cup B}}{\longrightarrow} l$.

***Démonstration.***
"$\Longleftarrow$" découle d'une remarque précédente car $A \cup B \supset A$ et $A \cup B \supset B$.
Réciproquement, supposons que $(f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l)$.
Soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $(U, U') \in \mathcal{V}(a)^2$ tel que $f(U \cap A) \subset V$ et $f(U' \cap B) \subset V$.

Posons $U" = U \cap U' \in \mathcal{V}(a)$. $f(U" \cap A) \subset f(U \cap A) \subset V$ et $f(U" \cap B) \subset f(U' \cap B) \subset V$.
Ainsi $f(U" \cap (A \cup B)) = f((U" \cap A) \cup (U" \cap B)) = f(U" \cap A) \cup f(U" \cap B) \subset V$.
On a montré que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A \cup B}}{\longrightarrow} l$. $\square$

**Définition.** Supposons que $E = \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$.
- Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap ]a, +\infty[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap ]a,+\infty[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à droite du réel $a$.
- De même, si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap ]-\infty, a[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty,a[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à gauche du réel $a$.

**Exemples :**
- la limite à droite de $\lfloor x \rfloor$ en $n \in \mathbb{Z}$ est égale à $n$ et la limite à gauche est égale à $n-1$.
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $-\infty$ en $1^-$ et vers $+\infty$ en $1^+$.
- $\dfrac{|x|}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{|x|}{x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -1$.

**Remarque.** Comme les notions de limites à droite et à gauche ne sont que des cas particuliers de la notion de limite, toutes les propriétés relatives aux limites s'appliquent au cas des limites à droite et à gauche.

**Propriété.** On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap ]-\infty, a[} \cap \overline{\mathcal{D}_f \cap ]a, +\infty[}$.
Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} l$.

***Démonstration.***
$\mathcal{D}_f \setminus \{a\} = (\mathcal{D}_f \cap ]-\infty, a[) \cup (\mathcal{D}_f \cap ]a, +\infty[)$, donc, d'après la propriété précédente, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap ]a,+\infty[}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap ]-\infty,a[}}{\longrightarrow} l$. $\square$

**Propriété.** Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et si $f(A) \subset B$, alors $l \in \overline{B}$.

***Démonstration.***
Il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \in f(A) \subset B$, donc $l \in \overline{B}$. $\square$

**Exemple.** Supposons que $F = \mathbb{R}$ et que $\forall x \in A \;\; f(x) > 0$. Alors, s'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$, $l \geq 0$.

## 2.2 Continuité en un point

**Remarque.** Si $a \in A$ et si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$, alors $l = f(a)$.

***Démonstration.***
Supposons que $a \in A$ et que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.
$a \in A$, donc la suite constante égale à $a$ est une suite d'éléments de $A$. Ainsi la suite constante égale à $f(a)$ converge vers $l$. D'après l'unicité de la limite, $f(a) = l$. □

**Définition.** Soit $a \in \mathcal{D}_f$. $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$.

**Exemple.** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en $x$ si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

**Exemple.** La fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, notée $1_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout réel.
En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, il existe $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ et $(r_n) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. Ainsi, si $1_{\mathbb{Q}}$ était continue en $x$, on aurait $1_{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{n \to +\infty} 1_{\mathbb{Q}}(q_n) = 1 = \lim_{n \to +\infty} 1_{\mathbb{Q}}(r_n) = 0$.

**Propriété.** On suppose que $F = \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
$f$ est continue en $a$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en $a$.

**Propriété.** Soit $a \in \mathcal{D}_f$. $f$ est continue en $a$ si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
i) Pour toute suite $(x_n)$ de points de $\mathcal{D}_f$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f \ \ (d(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.
iii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \ \exists U \in \mathcal{V}(a) \ \ f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$.

**Remarque.** Notamment, lorsque $f$ est continue en $a$, si $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathcal{D}_f$, alors $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.

**Propriété.** Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que $a$ est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), $f$ est continue en $a$.
Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$.

***Démonstration.***
- Supposons que $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$. Ainsi, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $V \cap (\mathcal{D}_f \setminus \{a\}) = \emptyset$. Or il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(a, \varepsilon) \subset V$. Donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $d(x, a) < \varepsilon \Longrightarrow x = a$.
Soit $(x_n) \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N$, $d(x_n, a) < \varepsilon$. Ainsi la suite $(x_n)$ est stationnaire à partir du rang $N$ et égale à $a$. Donc la suite $(f(x_n))$ est stationnaire à partir du rang $N$ et égale à $f(a)$. En particulier, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$. On a prouvé que $f$ est continue en $a$.

- Supposons que $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$.
Posons $A = \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ et $B = \{a\}$. Ainsi $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$,

donc d'après une propriété précédente,
$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f=A\cup B}}{\longrightarrow} f(a)$ si et seulement si $[f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f\setminus\{a\}=A}}{\longrightarrow} f(a)]\wedge[f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B=\{a\}}}{\longrightarrow} f(a)]$, or d'après la caractérisation séquentielle de la limite en un point, il est évident que l'on a toujours $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$, donc $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f\setminus\{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$. □

**Remarque.** Soient $a \in \mathcal{D}_f$ et $U_0 \in \mathcal{V}(a)$. $f$ est continue en $a$ si et seulement si $f|_{\mathcal{D}_f\cap U_0}$ est continue en $a$. Ainsi la notion de continuité (au point $a$) est une notion locale.

**Définition.** On dit que $f$ est continue si et seulement si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

**Exemple.** L'application $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est continue sur $\mathbb{C}^*$.

***Démonstration.***
On a vu dans le chapitre "suites de vecteurs" que si $(x_n)$ est une suite de complexes non nuls telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{1}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$. □

**Propriété.** Les applications lipschitziennes sont continues.

***Démonstration.***
Supposons que $f$ est $k$-lipschitzienne et soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $(x_n) \in \mathcal{D}_f^{\mathbb{N}}$ converge vers $a$, comme $d(f(x_n), f(a)) \leq kd(x_n, a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Ainsi $f$ est continue en $a$. □

**Propriété.** Soient $A$ une partie de $\mathcal{D}_f$ et $a \in A$. Si $f$ est continue en $a$, alors $f|_A$ est aussi continue en $a$.

***Démonstration.***
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$, comme $\mathcal{D}_f \supset A$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} f(a)$. □

**Corollaire.** Soit $A$ une partie incluse dans $\mathcal{D}_f$. Si $f$ est continue, alors $f|_A$ est continue.

**Remarque.** Il est important de distinguer la propriété $P$ : "$f|_A$ est continue" et la propriété $Q$ : "$f|_{\mathcal{D}_f}$ est continue en tout point de $A$".
En effet, $Q \Longrightarrow P$, mais la réciproque est fausse. Par exemple, $(1_{\mathbb{Q}})|_{\mathbb{Q}}$ est continue, car constante, mais $1_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{Q}$.

**Définition.** On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que $f$ est continue à droite en $a$ si et seulement si $f|_{[a,+\infty[\cap\mathcal{D}_f}$ est continue en $a$. On définit de même la notion de continuité à gauche.

**Propriété.** On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
$f$ est continue en $a$ si et seulement si $f$ est continue à droite et à gauche en $a$.

**Exemple.** $x \longmapsto |x|$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est continue à gauche et à droite en 0, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exemple.** Posons $f(x) = \lfloor x\rfloor + (x - \lfloor x\rfloor)^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$f$ est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $m \in \mathbb{Z}$. $\lim\limits_{x\to m^-} f(x) = m-1+(m-(m-1))^2 = m-1+1 = m$
et $\lim\limits_{x\to m^+} f(x) = m+(m-m)^2 = m$, donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exemple.** Posons $f(x) = \lfloor -|x| \rfloor$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$f$ est clairement continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $\lim\limits_{x\to m^-} f(x) = -m = \lim\limits_{x\to -m^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to m^+} f(x) = -m-1 = \lim\limits_{x\to -m^-} f(x)$, donc $f$ est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}^*$.
En 0, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, mais $f(0)=0$, donc $f$ n'est pas continue en 0.

**Remarque.** Considérons l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par les relations suivantes. Pour tout $x<0$, $f(x)=0$ et pour tout $x\geq 0$ $f(x)=1$.
$f|_{\mathbb{R}_-^*}$ et $f|_{\mathbb{R}_+}$ sont continues (car elles sont constantes) mais $f = f|_{\mathbb{R}_-^*\cup\mathbb{R}_+}$ n'est pas continue (car $f(-\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$).

**Définition.** On suppose que $f$ est continue. Soit $D \supset \mathcal{D}_f$. On dit que $f$ se prolonge par continuité sur $D$ si et seulement s'il existe une application $\tilde{f} : D \longrightarrow F$ continue et telle que $\tilde{f}|_{\mathcal{D}_f} = f$.

**Propriété.** Soit $a \in \overline{\mathcal{D}_f}\setminus\mathcal{D}_f$. $f$ admet un prolongement par continuité en $a$ si et seulement si $f$ admet une limite finie en $a$. Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité $\tilde{f}$ de $f$ sur $\mathcal{D}_f\cup\{a\}$ est donné par $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.

***Démonstration.***
Posons $D = \mathcal{D}_f \cup\{a\}$.
• Supposons que $f$ admet un prolongement par continuité sur $D$, noté $\tilde{f}$.
Alors $\tilde{f}(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in D}}{\longrightarrow} \tilde{f}(a)$, or $\mathcal{D}_f \subset D$ et $a \in \overline{\mathcal{D}_f}$, donc $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in\mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} \tilde{f}(a)$. Donc $f$ admet une limite finie en $a$ et $\tilde{f}(a)$ est égal à cette limite.
Ainsi, sous l'hypothèse de l'existence du prolongement, on a déjà montré son unicité.
• Supposons que $f$ admet une limite en $a$ et posons $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$.
$a \in \overline{D\setminus\{a\}}$, et $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \tilde{f}(x)$, donc $\tilde{f}$ est continue en $a$.
Soit $x\in\mathcal{D}_f$ : il faut également montrer que $\tilde{f}$ est continue en $x$. Posons $\varepsilon = d(x,a) > 0$ : $B_o(x,\varepsilon)\cap(\mathcal{D}_f\cup\{a\}) = B_o(x,\varepsilon)\cap\mathcal{D}_f$, donc $\tilde{f}|_{B_o(x,\varepsilon)\cap(\mathcal{D}_f\cup\{a\})} = f|_{B_o(x,\varepsilon)\cap\mathcal{D}_f}$. Ainsi, $f$ et $\tilde{f}$ coïncident sur un voisinage de $x$, or $f$ est continue en $x$, donc $\tilde{f}$ est continue en $x$. □

**Exemple.** L'application "sinus cardinal" est définie par $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ lorsque $x\neq 0$ et $\mathrm{sinc}(0)=1$. Elle est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exemple.** L'application $f$ définie par $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(x)=0$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Propriété.** Soient $A\subset E$ et $f$ et $g$ deux applications continues de $A$ dans $F$.
Si $f$ et $g$ coïncident sur une partie dense dans $A$, alors $f=g$.

***Démonstration.***
On suppose qu'il existe $B \subset A$ telle que $\forall x \in B \ \ f(x) = g(x)$ et $\overline{B} \supset A$.
Soit $x \in A$. Il existe $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. De plus, $f$ et $g$ étant continues, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$, donc par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$.
Ainsi $f$ et $g$ coïncident sur $A$, donc $f = g$. □

## 2.3 Théorèmes de composition

**Notation.** Dans ce paragraphe, on fixe un troisième espace métrique noté $G$ et une seconde fonction $g\ : F \longrightarrow G$, définie sur $\mathcal{D}_g$.

**Propriété.** Soit $B$ une partie de $\mathcal{D}_g$ telle que $\boxed{f(A) \subset B}$.
Soit $m$ tel que $m \in G \cup \{\infty\}$ ou bien, lorsque $G = \mathbb{R}$, tel que $m = +\infty$ ou $m = -\infty$.

| |
|---|
| Pour que $g(f(x)) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} m$,<br>il suffit que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ (auquel cas $B$ rencontre tout voisinage de $l$) et que $g(y) \underset{\substack{y\to l\\ y\in B}}{\longrightarrow} m$. |

***Démonstration.***
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et que $g(y) \underset{\substack{y\to l\\ y\in B}}{\longrightarrow} m$.
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $(f(x_n)) \in B^{\mathbb{N}}$,
donc $g(f(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$. Ainsi $g(f(x)) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} m$. □

**Exemple.** Si l'on admet que $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (ce qui provient du fait que ln est dérivable en 1 avec $\ln'(1) = 1$) et que $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ (ce qui provient de la continuité de exp en 0), par composition, on obtient que $\dfrac{\ln(1 + (e^t - 1))}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc que $\dfrac{t}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$.

**Corollaire.** On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on fixe $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $f$ est continue en $a$ et $g$ en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en $a$.
***Démonstration.***
On applique la propriété précédente avec $A = \mathcal{D}_f$, $B = \mathcal{D}_g$ et $b = f(a)$. □

**Corollaire.** On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Si $f$ et $g$ sont continues, alors $g \circ f$ est continue (et définie sur $\mathcal{D}_f$).

**Exemple.** Si $f$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $|f|$ est aussi continue.

**Corollaire.** On suppose que $f(A) \subset \mathcal{D}_g$.
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} b$ et si $g$ est continue en $b$, alors $g(f(x)) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} g(b)$.

**Propriété. Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit.**
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où $F_1$, ..., $F_q$ sont des espaces vectoriels normés et notons $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$. Soit $l = (l_1, \ldots, l_q) \in F$. Alors, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l_i$.

***Démonstration.***
En effet, on a déjà vu lors du cours sur les suites de vecteurs que, pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \ f_i(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_i$.
□

**Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit.**
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où $F_1$, ..., $F_q$ sont des espaces vectoriels normés et notons $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Alors, $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i$ est continue en $a$.

**Exemple.** L'application $\begin{array}{ccc} ]-1, +\infty[ & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1+4x & e^x \\ \sin x & \ln(1+x) \end{pmatrix} \end{array}$ est continue.

**Propriété. Limite d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie.** Supposons que $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} f_i(x) e_i \end{array}$.

Soient $A$ une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} l_i e_i \in F$. Alors, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l_i$.

***Démonstration.***
Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut choisir la norme suivante : $\begin{array}{rccl} \|.\|: & F & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} y_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} |y_i| \end{array}$.

Notons $\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{K}^q & \longrightarrow & F \\ & (y_1, \ldots, y_q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{q} y_i e_i \end{array}$. Pour tout $y = (y_1, \ldots, y_q) \in \mathbb{K}^q$, $\|\varphi(y)\| = \|y\|_1$. Ainsi $\varphi$ et $\varphi^{-1}$ sont continues.
D'après le théorème de composition des limites, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $\varphi^{-1}(f(x)) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} \varphi^{-1}(l)$, donc si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l_i$. □

**Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie.** Supposons que $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)e_i \end{array}$.

Si $a \in \mathcal{D}_f$, $f$ est continue en $a$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i$ est continue en $a$.

## 2.4 Opérations algébriques sur les limites

### 2.4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

**Notation.**
Dans ce paragraphe, on fixe une seconde fonction $g\ : E \longrightarrow F$, définie sur $\mathcal{D}_g$, où $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

**Propriété.** Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l + l'$.

***Démonstration.***
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Alors $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l'$, donc $(f+g)(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l + l'$,
ce qui prouve que $(f+g)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l + l'$. $\square$

**Remarque.** La démonstration (et donc l'énoncé) est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$, c'est-à-dire lorsque $l$ et $l'$ sont les deux éléments distincts de $\{+\infty, -\infty\}$.

**Propriété.** Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, $f+g$ est continue en $a$.

**Corollaire.** La somme de deux applications continues est continue.

### 2.4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

**Notation.** Dans ce paragraphe, on suppose que $f$ est une application de $E$ dans $\mathbb{K}$ et que $g$ est une application de $E$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $F$. Ainsi $f$ est une "application scalaire" et $g$ est une "application vectorielle". On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

**Propriété.** Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(fg)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} ll'$.

***Démonstration.***
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l'$. Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Alors $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ et $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l'$, donc $(fg)(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ll'$,
ce qui prouve que $(fg)(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} ll'$. $\square$

**Remarque.** La démonstration (et donc l'énoncé) est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

**Propriété.** Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, $fg$ est aussi continue en $a$.

**Corollaire.** Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

**Propriété.** Soit $A$ une partie de $E$ et $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de $A$ dans $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

**Propriété.** On suppose que $f$ est une application de $E$ dans $\mathbb{K}^*$.
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{K}$ alors $(\frac{1}{f})(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$.

**Remarque.** Cette propriété est valable avec des limites infinies dans les cas suivants :
- Si $l = \infty$, en convenant que $\frac{1}{\infty} = 0$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^+$ (c'est-à-dire que $l = 0$ et que $f$ est strictement positive au voisinage de $a$), en convenant que $\frac{1}{0^+} = +\infty$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^-$, en convenant que $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

**Exemple.** Lorsque $x$ tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ présente une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty} = 0 \times \infty$. On peut lever cette indétermination en écrivant que, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{x^3+1}{x^2-1} \sim \dfrac{x^3}{x^2} = x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exemple.** Déterminons la limite de $f(x) = \dfrac{\ln(\sin x)}{\ln x}$ lorsque $x$ tend vers $0^+$.
$\ln(\sin x) = \ln\Big(x \times \dfrac{\sin x}{x}\Big) = \ln x + \ln\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)$, or $\dfrac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$,
donc $\ln x + \ln\Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$ puis $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

**Exemple.** Déterminons la limite de $x^x$ lorsque $x$ tend vers $0^+$.
$x^x = e^{x \ln x}$, or d'après les croissances comparées, $x \ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $x^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

## 2.5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose ici que $F = \mathbb{R}$.

**Propriété : passage à la limite sur une inégalité *large* :**
Si $\forall x \in A \;\; f(x) \leq g(x)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l \leq l'$.

***Démonstration.***
$(g - f)(A) \subset \mathbb{R}_+$, et d'après les propriétés précédentes,
$(g - f)(x) \underset{\substack{x\to a\\x\in A}}{\longrightarrow} l' - l$, donc $l' - l \in \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+$. □

**Principe du tunnel (pour des inégalités strictes)** :
On suppose que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < \ell < \beta$. Alors, au voisinage de $a$, $\alpha < f(x) < \beta$.

**Corollaire.** Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors $f|_A$ est bornée au voisinage de $a$.

**Propriété. Principe des gendarmes.**

Soient $h_1$, $h_2$ et $h_3$ trois fonctions de $E$ dans $\mathbb{R}$ telles que $A \subset \bigcap_{i=1}^{3} \mathcal{D}_{h_i}$.
Si $\forall x \in A \;\; h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x)$, $h_1(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $h_3(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$, alors $h_2(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

***Démonstration.***
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. Alors $h_1(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$,
$h_3(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $\forall n \in \mathbb{N} \;\; h_1(x_n) \leq h_2(x_n) \leq h_3(x_n)$, donc d'après le principe des gendarmes établi pour les suites, $h_2(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. Ainsi $h_2(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$. $\Box$

**Remarque.** Il suffit que l'encadrement $h_1(x) \leq h_2(x) \leq h_3(x)$ soit réalisé lorsque $x$ est au voisinage de $a$.

**Exemple.** $|\dfrac{\sin x}{x}| \leq \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|\dfrac{\sin x}{x}| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Corollaire.** Le produit d'une fonction bornée au voisinage de $a$ et d'une fonction qui tend vers 0 en $a$ est une fonction qui tend vers 0 en $a$.

**Remarque.** On peut adapter le principe des gendarmes au cas où $l = \pm\infty$.

**Exemple.** $x + \cos x \geq x - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

## 2.6 Exemples

**Exemple 1 :** L'application $\begin{array}{rccc} f: & ]-3,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left(\sqrt{\dfrac{1}{x+3}} + e^{2x}\right)^3 \end{array}$ est continue.

***Démonstration.***
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et les applications constantes sont continues car lipschitziennes. Le produit de deux applications continues à valeurs réelles étant continue,
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}$ est continue. Or l'application $\begin{array}{rccc} exp: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^x \end{array}$ est continue (admis),
donc par composition, $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{2x} \end{array}$ est continue.
La somme de deux applications continues à valeurs réelles étant continue, l'application
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+3 \end{array}$ est continue. Or $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$ est continue, donc par composition,

$\begin{array}{rcl} ]-3,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x+3} \end{array}$ est continue. En composant à nouveau par l'application continue $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$, on obtient la continuité de $\begin{array}{rcl} ]-3,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} \end{array}$.

La somme de deux applications continues à valeurs réelles étant continue, l'application $\begin{array}{rcl} ]-3,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1}{x+3}}+e^{2x} \end{array}$ est continue. Enfin en composant par l'application continue $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$, on obtient la continuité de $f$.

Sur une copie, on se contentera pour ce type d'applications numériques (construites à partir des fonctions usuelles par composition, sommation et produit) d'écrire : "D'après les théorèmes usuels, $f$ est continue". □

**Exemple 2.** L'application $\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+yz^2+\sin\left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2+1}\right) \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{z^2+3} \end{pmatrix} \end{array}$ est continue d'après les théorèmes usuels.

**Exemple 3.** Notons $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left| \begin{array}{ll} \dfrac{x^3e^{x+y}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y)=0 \end{array} \right. \end{array}$.

$f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ d'après les théorèmes usuels.
De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $0\leq|f(x,y)|\leq|x|e^{x+y}=g(x,y)$. L'application $g$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'après les théorèmes usuels, donc $g(x,y)\underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} g(0,0)=0$. On déduit alors du théorème des gendarmes que $f(x,y)\underset{\substack{(x,y)\to 0\\(x,y)\neq 0}}{\longrightarrow} 0=f(0,0)$, ce qui prouve que $f$ est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}^2$.

**Exemple 4.** Notons $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2e^{x+y}}{x^2+y^2} \end{array}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f(0,\frac{1}{n})=0\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\frac{1}{2}e^{\frac{2}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{2}\neq 0$,
or $(0,\frac{1}{n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $f$ n'est pas prolongeable par continuité en 0.

## 2.7 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Théorème de la limite monotone :** Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$.
Notons $I = ]m, M[$ et soit $f$ une application de $I$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est croissante, alors } f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}}$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est décroissante, alors } f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}}$.

***Démonstration.***
Par exemple, avec $f$ décroissante, lorsque $x$ tend vers $M$, en supposant $f$ minorée (ainsi, $\inf_{y \in I} f(y) \in \mathbb{R}$).
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $a \in I$ tel que $f(a) < \inf_{y \in I} f(y) + \varepsilon$.
Ainsi, en notant $l = \inf_{y \in I} f(y)$, pour tout $x \in [a, M[$, $l \leq f(x) \leq f(a) \leq l + \varepsilon$, donc $|f(x) - l| \leq \varepsilon$. $\square$

**Propriété.** Reprenons les notations du théorème précédent. Si $f$ est monotone, alors, pour tout $a \in I$, $f$ possède en $a$ une limite à droite, notée $f(a^+)$, et une limite à gauche, notée $f(a^-)$. De plus, si $f$ est croissante, $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, et si $f$ est décroissante, $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$.
$f$ est discontinue en $a$ si et seulement si $f(a^+) \neq f(a^-)$ et dans ce cas $|f(a^+) - f(a^-)|$ s'appelle le saut de discontinuité de $f$ en $a$.

***Démonstration.***
Supposons par exemple que $f$ est croissante. Soit $a \in I$. Appliquons le théorème précédent à la restriction de $f$ sur l'intervalle $]a, M[$. On obtient que $f(x)$ tend vers $\inf_{t \in ]a,M[} f(t)$ lorsque $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures. Mais $f|_{]a,M[}$ est minorée par $f(a)$, donc $\inf_{t \in ]a,M[} f(t) \in \mathbb{R}$. Ceci prouve que $f(a^+)$ est bien définie, avec $f(a^+) = \inf_{t \in ]a,M[} f(t)$. En particulier, $f(a^+) \geq f(a)$.
De même, en considérant l'intervalle $]m, a[$, on montre que $f(a^-)$ est bien définie, avec $f(a^-) \leq f(a)$.
Lorsque $f$ est décroissante, $-f$ est croissante, ce qui permet de montrer que $f(a^+)$ et $f(a^-)$ sont bien définies, avec $f(a^+) \leq f(a) \leq f(a^-)$. $\square$

**Remarque.** On peut en déduire que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone définie sur un intervalle est au plus dénombrable :

> **Exercice.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que le nombre de points de discontinuité de $f$ est au plus dénombrable.
>
> **Solution :** Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des points de discontinuité de $f$ qui appartiennent à l'intérieur de $I$. Il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable.
> Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors, avec les notations précédentes, $f(a^-) < f(a^+)$, donc il existe $q_a \in \mathbb{Q}$ tel que $f(a^-) < q_a \leq f(a^+)$. On peut ainsi considérer l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ a & \longmapsto & q_a \end{array}.$$

(remarque : on peut éviter d'utiliser l'axiome du choix en construisant $q_a$ en fonction de $a$, par exemple en prenant pour $q_a$ le développement décimal de $f(a^+)$, tronqué au premier rang pour lequel $f(a^-) < q_a$).
Si l'on montre que $g$ est injective, on en déduit que $\mathcal{D}$ est en bijection avec $g(\mathcal{D})$ qui est au plus dénombrable en tant que partie de $\mathbb{Q}$, donc cela prouve que $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable.
Soit $a, b \in \mathcal{D}$ tel que que $a < b$. Il existe $c \in ]a, b[$. Alors, $f$ étant croissante, $q_a \leq f(a^+) = \inf\limits_{t>a} f(t) \leq f(c) \leq \sup\limits_{t<b} f(t) = f(b^-) < q_b$, donc $g(a) \neq g(b)$, ce qui conclut.

# 3 Continuité globale

## 3.1 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

**Notation.** : Dans ce paragraphe, on fixe un intervalle $I$ d'intérieur non vide.

**Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)** :
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

***Démonstration.***
Au tableau. □

**Exercice.** Soit $P$ une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré impair. Montrer que $P$ possède au moins une racine réelle.

**Exercice.** Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application continue, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $f$ possède au moins un point fixe.

**Seconde formulation du TVI** :
L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

***Démonstration.***
Reprenons les notations de la première formulation.
Pour tout $\alpha, \beta \in f(I)$, pour tout $k$ dans le segment $[\alpha, \beta]$, $k \in f(I)$, donc $f(I)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$. □

**Théorème.** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

***Démonstration.***
⋄ Supposons que $f$ est strictement monotone. Alors $f$ est injective, même lorsque $f$ n'est pas continue. En effet, lorsque $a, b \in I$ avec $a < b$, on a $f(a) < f(b)$ ou bien $f(a) > f(b)$ selon que $f$ est strictement croissante ou décroissante. En particulier, $f(a) \neq f(b)$.
⋄ Supposons que $f$ est continue et qu'elle n'est pas strictement monotone.

Il existe donc $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $x_3 < x_4$ avec $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_3) > f(x_4)$. Ainsi, sur l'intervalle $[a, b] = [\min\limits_{1\leq i\leq 4} x_i, \max\limits_{1\leq i\leq 4} x_i]$, la restriction de $f$ n'est pas strictement monotone.
Si $f(a) = f(b)$, alors $f$ n'est pas injective. Supposons maintenant que $f(a) \neq f(b)$.
Quitte à remplacer $f$ par $-f$, on peut supposer que $f(a) < f(b)$.
$f$ n'étant pas strictement croissante, il existe $x, y \in [a, b]$ tels que $x < y$ et $f(x) \geq f(y)$.
Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $g(t) = f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$.
Ainsi, $g(0) = f(b) - f(a) > 0$ et $g(1) = f(y) - f(x) \leq 0$, or $g$ est continue d'après les théorèmes usuels, donc d'après le TVI, il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = 0$. Alors $f((1-t_0)b+t_0y) = f((1-t_0)a+t_0x)$, or $(1-t_0)b+t_0y \in [y, b]$ et $(1-t_0)a+t_0x \in [a, x]$, donc $(1-t_0)b + t_0y \neq (1-t_0)a + t_0x$, ce qui prouve que $f$ n'est pas injective. □

**Théorème de la bijection :**
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
Ainsi, en notant encore $f$ la restriction $f|^{f(I)}$, $f$ est une bijection de $I$ dans $f(I)$.
Alors, $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est également **continue** et strictement monotone (de même sens de variation que $f$).

**Remarque.** La démonstration n'utilise la continuité de $f$ que pour garantir que $f(I)$ est un intervalle. Ainsi, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors $f|^{f(I)}$ est une bijection et $(f|^{f(I)})^{-1}$ est continue. En fait, $f$ possède un nombre dénombrable de points de discontinuité qui font de $f(I)$ une union disjointe d'intervalles sur lesquels il y a bien continuité.

**Corollaire.** L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

***Démonstration.***
Notons $\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. $f$ est continue d'après les théorèmes usuels.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < y$, $x^2 = x \times x < xy < y \times y = y^2$ et pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$, donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le TVI, $f(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$, contenant $f(0) = 0$, non majoré car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 = n \times n \geq n$, donc $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.
D'après le théorème de la bijection, $f^{-1}$ est une bijection continue et strictement croissnate de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et le théorème de la limite monotone permet de conclure. □

**Remarque.** De la même façon, ce théorème permet de définir les applications arcsin et arccos et d'affirmer qu'elles sont continues.

**Remarque.** Dans un tableau de variations, les flèches obliques signifient que l'application étudiée est continue et strictement monotone. Le théorème de la bijection affirme en particulier que toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes exactement une fois.

**Exemple.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in ]2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $u_n \sin(u_n) = 1$.

**Remarque.** Ainsi, pour toute application continue bijective entre deux intervalles, son application réciproque est continue.
C'est faux dans le cadre plus général des espaces métriques : l'application $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ est une bijection continue de $[0, 2\pi[$ dans $\mathbb{U}$ (par restriction de l'exponentielle complexe qui est continue car développable en série entière (cf cours de seconde année)), mais son application réciproque n'est pas continue en 1. En effet, pour tout $z \in \mathbb{U}$,
$f^{-1}(z) = \text{Arg}(z)$, donc $f^{-1}(e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}) = 2\pi - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1)$, or $e^{i(2\pi-\frac{1}{n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

**Définition.** Soit $E$ et $F$ deux espaces métriques. $f : E \longrightarrow F$ est un homeomorphisme entre $E$ et $F$ si et seulement si $f$ est une bijection telle que $f$ et $f^{-1}$ sont continues.
Deux espaces métriques sont homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme entre ces deux espaces.

## 3.2 Continuité et ouverts

**Théorème.** Soit $E$ et $F$ deux espaces métriques et soit $f : E \longrightarrow F$ une application définie sur $\mathcal{D}_f$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

| |
|---|
| i) $f$ est continue. |
| ii) L'image réciproque par $f$ de tout ouvert de $F$ est un ouvert pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. |
| iii) L'image réciproque par $f$ de tout fermé de $F$ est un fermé pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. |

***Démonstration.***
• i)$\Longrightarrow$ii). Supposons que $f$ est continue.
Soit $U$ un ouvert de $F$. Soit $x \in f^{-1}(U)$. $f(x) \in U$ et $U$ est un ouvert, donc $U \in \mathcal{V}(f(x))$. Or $f$ est continue en $x$, donc $f(t) \underset{\substack{t\to x\\ t\in\mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(x)$. Ainsi il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f(V \cap \mathcal{D}_f) \subset U$.
Si $y \in V \cap \mathcal{D}_f$, $f(y) \in U$, donc $y \in f^{-1}(U)$. Ainsi $V \cap \mathcal{D}_f \subset f^{-1}(U)$, donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de $x$ pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. On a montré que $f^{-1}(U)$ est voisinage de chacun de ses points, au sens de la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$, donc que c'est un ouvert pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$.

• ii)$\Longrightarrow$iii). Soit $K$ un fermé de $F$. $F \setminus K$ est un ouvert de $F$, donc $f^{-1}(F \setminus K)$ est un ouvert pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. Or $f^{-1}(F \setminus K) = \mathcal{D}_f \setminus f^{-1}(K)$, donc $f^{-1}(K)$ est un fermé pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$.
De même on démontrerait que iii)$\Longrightarrow$ii).

• ii)$\Longrightarrow$i). Soit $x \in \mathcal{D}_f$. Soit $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Il existe $r > 0$ tel que $B_o(f(x), r) \subset V$. $B_o(f(x), r)$ est un ouvert de $F$, donc $f^{-1}(B_o(f(x), r))$ est un ouvert pour la topologie induite sur $\mathcal{D}_f$. Ainsi c'est la trace sur $\mathcal{D}_f$ d'un ouvert pour la topologie globale de $E$ que l'on notera $U$.

Si $y \in U \cap \mathcal{D}_f = f^{-1}(B_o(f(x), r))$, $f(y) \in B_o(f(x), r) \subset V$, donc $f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$.
D'autre part $f(x) \in B_o(f(x), r)$, donc $x \in U$, or $U$ est un ouvert, donc $U \in \mathcal{V}(x)$.
On a donc montré que $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))\ \exists U \in \mathcal{V}(x)\ f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$. C'est dire que $f(t) \underset{\substack{t\to x\\ t\in\mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(x)$ donc que $f$ est continue en $x$. □

**Remarque.** Ce théorème est un moyen très pratique pour montrer qu'une partie est un ouvert ou un fermé.

**Exemple.** Dans $\mathbb{R}^3$, considérons
$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1)\sin(z) < e^{x+z} \text{ et } x + y - z > 1\}$.
Notons $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & \ln(x^2+y^2+1)\sin(z) - e^{x+z} \end{array}$ et
$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & 1-x-y+z \end{array}$. $f$ et $g$ sont continues d'après les théorèmes usuels, donc $U = f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) \cap g^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ est un ouvert.
De même, on montrerait que
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1)\sin(z) \leq e^{x+z} \text{ et } x + y - z \geq 1\}$ est un fermé.

> **Exercice.** Soient $A$ et $B$ deux parties non vides de $E$ telles que $d(A, B) > 0$. Montrez qu'il existe deux ouverts disjoints $U$ et $V$ tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ (on dit que $U$ et $V$ séparent $A$ et $B$).
>
> ***Solution.*** Il suffit de prendre $U = \{x \in E / d(x, A) < \dfrac{d(A, B)}{2}\}$ et $V = \{x \in E / d(x, A) > \dfrac{d(A, B)}{2}\}$.
> On en déduit que $A$ est un ouvert-fermé relatif de $A \cup B$, non vide et différent de $A \cup B$.

## 3.3 Continuité d'une application linéaire

**Notation.** Dans ce paragraphe, $E$ et $F$ désignent 2 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

**Théorème.** On suppose que $f \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $f$ est continue.
ii) $f$ est continue en 0.
iii) $f$ est bornée sur la boule unité de $E$.
iv) $f$ est bornée sur la sphère unité de $E$.
v) $\exists k \in \mathbb{R}_+\ \forall x \in E\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$.
vi) $f$ est lipschitzienne.

***Démonstration.***
i)$\Longrightarrow$ii). C'est clair.
ii)$\Longrightarrow$iii). Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $(\|x\| \leq \alpha \Longrightarrow \|f(x)\| \leq 1)$.
Soit $x \in B_f(0, 1)$. $\|\alpha x\| = \alpha\|x\| \leq \alpha$, donc $\|f(\alpha x)\| \leq 1$, or $f$ est linéaire, donc $\|f(x)\| \leq \frac{1}{\alpha}$.

iii)$\Longrightarrow$iv). C'est clair.
iv)$\Longrightarrow$v). Il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in S(0,1)$ $\|f(x)\| \leq k$.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$. $\dfrac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$, donc $\|f(x)\| = \|x\| \|f(\dfrac{x}{\|x\|})\| \leq k\|x\|$.
Pour $x = 0$, $\|f(x)\| = 0 = k\|x\|$, donc pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leq k\|x\|$.
v)$\Longrightarrow$vi). Soit $(x,y) \in E^2$. $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq k\|x-y\|$, donc $f$ est lipschitzienne.
vi)$\Longrightarrow$i). C'est connu. $\square$

**Exemple.** Choisissons $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\begin{array}{rccc}\varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(0)\end{array}$.
• $\varphi$ est une application linéaire et pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$, donc $\varphi$ est continue sur $E$ pour $\|.\|_\infty$.
• Supposons que $\varphi$ est continue pour $\|.\|_1$. Ainsi il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $f \in E$, $|\varphi(f)| \leq k\|f\|_1$, c'est-à-dire $|f(0)| \leq k \int_0^1 |f(t)|dt$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n$ l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par les relations suivantes. Pour tout $t \in [0, \frac{1}{n}]$ $f_n(t) = 1 - nt$ et pour tout $t \in [\frac{1}{n}, 1]$ $f_n(t) = 0$.
$f_n \in E$ donc $1 = |f_n(0)| \leq k \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|dt = \frac{k}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $1 \leq 0$, ce qui est faux, donc $\varphi$ n'est pas continue pour $\|.\|_1$.
• *Autre méthode.* Posons $g_n(x) = (1-x)^n$. $\|g_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc si $\varphi$ est continue pour $\|.\|_1$, $\varphi(g_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = 0$, ce qui est faux.

**Propriété.** On note $LC(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Pour tout $u \in LC(E,F)$, on pose $\|u\| = \displaystyle\sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E \leq 1}} \|u(x)\|_F$.
Alors $LC(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.
De plus, pour tout $u \in LC(E,F)$ et $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq \|u\|\|x\|_E$.
***Démonstration.***
• $0 \in \mathcal{LC}(E,F)$, donc $\mathcal{LC}(E,F) \neq \emptyset$.
Si $(u,v,\alpha,\beta) \in \mathcal{LC}(E,F) \times \mathcal{LC}(E,F) \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, $\alpha u + \beta v$ est linéaire et continue d'après les théorèmes usuels, donc $\alpha u + \beta v \in \mathcal{LC}(E,F)$. Ainsi $\mathcal{LC}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$.
• Montrons maintenant que $\mathcal{LC}(E,F)$ est un espace vectoriel normé.
Notons $B$ la boule unité de $E$. Alors pour tout $u \in \mathcal{LC}(E,F)$, $u|_B$ est une application bornée de $B$ dans $F$, et $\|u\| = \|u|_B\|_\infty$.
Sachant que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(B,F)$, on en déduit :
pour tout $u, v \in \mathcal{LC}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|u\| \geq 0$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
et $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
Enfin, si $u \in \mathcal{LC}(E,F)$ vérifie $\|u\| = 0$, pour tout $x \in B$, $u(x) = 0$, donc si $y \in E \setminus \{0\}$, $u(\dfrac{y}{\|y\|}) = 0$ et $u(y) = 0$. Ainsi $u = 0$. $\square$

**Propriété.** Soit $E, F$ et $G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Soit $u \in LC(E,F)$ et $v \in LC(F,G)$. Alors $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.

***Démonstration.***
Pour tout $x \in E$, $\|(v \circ u)(x)\| \leq \|v\|\|u(x)\| \leq \|v\|\|u\|\|x\|$,
donc $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$. □

**Théorème.** Toute application linéaire dont l'ensemble de départ est de dimension finie est continue.

***Démonstration.***
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Il existe une base de $E$ notée $e = (e_1, \ldots, e_n)$. Lorsque $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on pose $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. On munit ainsi $E$ d'une norme.
Soient $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque et $u \in L(E, F)$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. $\|u(x)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|u(e_i)\|$.
Posons $\beta = \max_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|$. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, $\|u(x)\| \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \beta N(x)$.
$u$ étant linéaire, on en déduit qu'elle est $\beta$-lipschitzienne, donc $u$ est continue. □

**Théorème.** Soient $E_1, \ldots, E_p$ une famille de $p$ $\mathbb{K}$-espaces vectoriels *de dimensions finies*, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.
Toute application $p$-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $F$ est continue.

***Démonstration.***
Pour tout $j \in \mathbb{N}_p$, on note $n_j$ la dimension de $E_j$ et $e_j = (e_{1,j}, \ldots, e_{n_j,j})$ une base de $E_j$. Soit $f$ une application $p$-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $F$.
Soit $(x_1, \ldots, x_p) = (\sum_{i=1}^{n_j} a_{i,j} e_{i,j})_{1 \leq j \leq p} \in E_1 \times \cdots \times E_p$.
$f(x_1, \ldots, x_p) = f(\sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1} e_{i,1}, x_2, \ldots, x_p)$, donc en utilisant la linéarité selon la première variable, $f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1} f(e_{i,1}, x_2, \ldots, x_p)$, puis
$f(x_1, \ldots x_p) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{i,1} \sum_{j=1}^{n_2} a_{j,2} f(e_{i,1}, e_{j,2}, x_3, \ldots, x_p)$, donc
$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{u=(i_1,\ldots,i_p) \in \mathbb{N}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{N}_{n_p}} a_{i_1,1} \ldots a_{i_p,p} f(e_{i_1,1}, \ldots, e_{i_p,p})$.
Soit $j \in \mathbb{N}_p$ et $i \in \{1, \ldots, n_j\}$. $a_{i,j} = e^*_{i,j}(x_j)$, si l'on désigne par $(e^*_{k,j})_{1 \leq k \leq n_j}$ la base duale de $e_j$. Mais $e^*_{i,j}$ est une application linéaire dont l'espace de départ est de dimension finie, donc c'est une fonction continue. L'expression précédente de $f(x_1, \ldots, x_p)$ et les théorèmes usuels montrent alors que $f$ est continue. □

**Propriété.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Les applications polynômiales de $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ sont continues.

***Démonstration.***
Soit $f$ une fonction polynômiale de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Il existe une famille de scalaires $(\alpha_u)_{u\in\mathbb{N}^n}$ indexée par $\mathbb{N}^n$ et presque nulle telle que

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\; f(x) = \sum_{u=(k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{N}^n} \alpha_u x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}.$$

$f$ est donc continue sur $\mathbb{K}^n$ d'après les théorèmes usuels. □

**Remarque.** Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & g(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$.
Si $g$ est une application polynômiale, alors $f$ est continue. En effet, $f = g \circ h$ où $h : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$. $h$ est continue car linéaire en dimension finie, et $g$ est continue car polynômiale, donc $f$ est continue.

**Exemple.** L'application det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

## 3.4 Continuité et compacité

**Propriété (hors programme) :** $f$ est continue si et seulement si ses restrictions aux compacts de $E$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ sont continues.

***Démonstration.***
L'implication directe est connue.
Réciproquement, supposons que pour tout compact $K$ de $E$ inclus dans $\mathcal{D}_f$, $f|_K$ est continue.
Soit $l \in \mathcal{D}_f$. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui tend vers $l$. Il suffit d'établir que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(l)$. Mais $B = \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de $E$ inclus dans $\mathcal{D}_f$, donc $f|_B$ est continue. Or $(x_n)$ est une suite d'éléments de $B$ qui tend vers $l \in B$, donc $f(x_n) = f|_B(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f|_B(l) = f(l)$. □

**Théorème.**
$\boxed{\text{L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.}}$

***Démonstration.***
Soit $E$ et $F$ deux espaces métriques. Soit $A$ un compact de $E$ et $f\ : A \longrightarrow F$ une application continue.
Soit $(y_n) \in f(A)^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $y_n = f(x_n)$.
$A$ est compact, donc il existe une application $\varphi\ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante et $x \in A$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
$f$ étant continue, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(x) \in f(A)$, donc la suite $(f(x_n))$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $f(A)$. Ceci prouve que $f(A)$ est compact. □

**Corollaire.** Soient $A$ un compact non vide de $E$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors $f$ est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(x_m, x_M) \in A^2$ tel que, pour tout $x \in A$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$.

***Démonstration.***
$f(A)$ est un compact, donc $f(A)$ est un fermé borné dans $\mathbb{R}$. En particulier, $f(A)$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure, notée $S$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in f(A)$ tel que $S - \frac{1}{n+1} < y_n \leq S$. D'après le théorème des gendarmes, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, mais $f(A)$ est fermé, donc $S \in f(A)$, ce qui prouve que $f(A)$ admet un maximum.
De même, on montre que $f(A)$ admet un minimum. □

**Corollaire.** L'image directe d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment.

> **Exercice.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et périodique. Montrer qu'elle est bornée.
>
> **Exercice.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^1 \frac{(x \ln x)^n}{n!}\,dx$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**Théorème.**
Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

***Démonstration.***
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_q)$. Lorsque $y = \sum_{i=1}^{q} y_i e_i \in E$, posons $N(y) = \sum_{i=1}^{q} |y_i|$. On sait que $N$ est une norme sur $E$, pour laquelle les fermés bornés de $E$ sont des compacts.

• Soit $N'$ une seconde norme sur $E$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$. $N'(x) = N'(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| N'(e_i)$.
Posons $\beta = \max_{1\leq i\leq n} N'(e_i)$. Pour tout $x \in E$, $(1) : N'(x) \leq \beta \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \beta N(x)$.

• On en déduit que pour tout $(x, y) \in E^2$, $|N'(x) - N'(y)| \leq N'(x - y) \leq \beta N(x - y)$, c'est-à-dire que l'application $N' : (E, N) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application $\beta$-lipschitzienne. Ainsi, cette application est continue.
En particulier, si l'on note $S_N(0, 1) = \{x \in E \ / \ N(x) = 1\}$ (c'est la sphère unité pour la norme $N$), alors $N'|_{S_N(0,1)}$ est continue, or $S_N(0, 1)$ est un fermé borné de $(E, N)$, donc il est compact. Ainsi $N'|_{S_N(0,1)}$ est une application bornée qui atteint ses bornes.
En particulier, il existe $x_0 \in S_N(0, 1)$ tel que pour tout $x \in S_N(0, 1)$, $N'(x) \geq N'(x_0)$.
Si $x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{N(x)} \in S_N(0, 1)$, donc $N'\left(\frac{x}{N(x)}\right) \geq N'(x_0)$.
De plus $N(x_0) = 1$, donc $x_0 \neq 0$, ce qui montre que $N'(x_0) > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, (2) $: N(x) \leq \frac{1}{N'(x_0)} N'(x)$.
(1) et (2) prouvent que $N$ et $N'$ sont équivalentes. $\square$

### 3.5 La continuité uniforme

**Notation.** On fixe deux espaces métriques $E$ et $F$ ainsi qu'une application $f : E \longrightarrow F$ définie sur $\mathcal{D}_f \subset E$.

**Définition.**

> $f$ est uniformément continue sur $\mathcal{D}_f$ si et seulement si
> $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall (x,y) \in \mathcal{D}_f^2 \;\; (d(x,y) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$.

**Remarque.** Dans cette définition, les deux dernières inégalités peuvent être indifféremment prises strictes ou larges.

**Remarque.** $f$ est uniformément continue si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x_0 \in \mathcal{D}_f \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f \;\; (d(x,x_0) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon)$,
et $f$ est continue si et seulement si
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x_0 \in \mathcal{D}_f \;\; \exists \alpha_{x_0} \in \mathbb{R}_+^* \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f \;\; (d(x,x_0) \leq \alpha_{x_0} \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon)$.
Ainsi, si $f$ est uniformément continue, elle est continue, mais de plus, pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut choisir $\alpha$ indépendamment de $x_0$. On dit que $x_0 \longmapsto \alpha_{x_0}$ est uniforme en $x_0$, et, par extension, que la continuité est uniforme.
Cette indépendance de $\alpha$ par rapport à $x_0$ est souvent bien utile dans la démonstration de théorèmes généraux d'analyse. Ainsi l'intérêt de la continuité uniforme est essentiellement d'ordre théorique.

**Propriété.** Toute fonction uniformément continue est continue.

**Propriété. Caractérisation séquentielle de la continuité uniforme.**
$f$ est uniformément continue si et seulement si pour tout couple $((x_n),(y_n))$ de suites d'éléments de $\mathcal{D}_f$ tel que $d(x_n,y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $d(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

***Démonstration.***
• Supposons que $f$ est uniformément continue. Soit $((x_n),(y_n))$ un couple de suites d'éléments de $\mathcal{D}_f$ tel que $d(x_n,y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathcal{D}_f^2$,
$(d(x,y) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(x_n,y_n) \leq \alpha$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $d(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. On a montré que $d(f(x_n), f(y_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
• Supposons maintenant que $f$ n'est pas uniformément continue. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists (x,y) \in \mathcal{D}_f^2 \;\; d(x,y) \leq \alpha$ et $d(f(x), f(y)) > \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n,y_n) \in \mathcal{D}_f^2$ tel que $d(x_n,y_n) \leq \frac{1}{n+1}$ et $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$.

$d(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $d(f(x_n), f(y_n))$ ne converge pas vers 0. On a ainsi montré la contraposée de la réciproque. □

**Remarque.** Il existe des applications continues qui ne sont pas uniformément continues. Par exemple, $\begin{array}{ccc} ]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sans être uniformément continue.

***Démonstration.***
Posons $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{n+1}$. $x_n - y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{y_n} = -1$. □

**Exercice.** Montrer que $x \longmapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

**Propriété.** La composée de deux applications uniformément continues est uniformément continue.

***Démonstration.***
A l'aide de la caractérisation séquentielle. □

**Propriété.** Les applications lipschitziennes sont uniformément continues.
Ainsi, "lispchitzienne"$\Longrightarrow$"uniformément continue"$\Longrightarrow$"continue".

***Démonstration.***
A l'aide de la caractérisation séquentielle. □

**Propriété.** Si $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $F_1, \ldots, F_q$ sont $q$ espaces vectoriels normés, l'application $\begin{array}{cccc} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$ est uniformément continue si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i$ est uniformément continue.

***Démonstration.***
Exercice. □

**Théorème de Heine.**
Toute application continue sur un compact est uniformément continue.

***Démonstration.***
Soit $A$ un compact de $E$. On suppose que $f : A \longrightarrow F$ est une application continue.
Supposons que $f$ n'est pas uniformément continue. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $(x, y) \in A^2$ tel que $d(x, y) \leq \alpha$ et $d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(x_n, y_n) \in A^2$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.
$A$ est compact, donc $A^2$ est aussi compact. Ainsi, il existe $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $(x, y) \in A^2$ tel que $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x, y)$. Or l'application distance est continue, (en effet, $|d(x', y') - d(x, y)| \leq |d(x', y') - d(x', y)| + |d(x', y) - d(x, y)|$, donc $|d(x', y') - d(x, y)| \leq d(y', y) + d(x', x) \underset{(x',y')\to(x,y)}{\longrightarrow} 0$),
donc $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, y)$. Mais $d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq \dfrac{1}{\varphi(n+1)} \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après l'unicité de la limite, $d(x, y) = 0$, ce qui prouve que $x = y$.

$f$ étant continue, $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc de même que ci-dessus, on en déduit que $d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(f(x), f(x)) = 0$, ce qui est faux car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon$. Ainsi $f$ est uniformément continue. □

**Corollaire.** Toute application continue et définie sur un segment de $\mathbb{R}$ est uniformément continue.

**Exemple.** Notons $\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$. $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc elle est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Cependant, $f$ n'est pas lipschitzienne : sinon, $\{\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|}/0 \leq x < y \leq 1\}$ serait majoré ce qui est faux car $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{0}}{\frac{1}{n}-0} = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

**Exercice.** Montrez que toute application $f \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique est uniformément continue.

***Résolution.*** Soient $T > 0$ et $f \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $T$-périodique et continue. $[-T, 2T]$ est un compact et $f|_{[-T,2T]}$ est continue, donc d'après le théorème de Heine, $f|_{[-T,2T]}$ est uniformément continue.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha' > 0$ tel que
$\forall (x,y) \in [-T,2T]^2 \ (d(x,y) < \alpha' \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$.
Posons $\alpha = min(\alpha', T) > 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $d(x,y) < \alpha$. Notons $n$ la partie entière de $\frac{x}{T}$. $n \leq \frac{x}{T} < n+1$, donc $nT \leq x \leq nT+T$, puis $0 \leq x-nT \leq T$.
$d(y-nT, x-nT) = d(x,y) < \alpha \leq T$, or $x-nT \in [0,T]$, donc $y-nT \in [-T, 2T]$.
Ainsi, $(x-nT, y-nT) \in [-T,2T]^2$ et $d(x-nT, y-nT) < \alpha$, donc
$d(f(x), f(y)) = d(f(x-nT), f(y-nT)) < \varepsilon$.