Résumé de cours :
Semaine 18, du 26 au 30 janvier.

Séries de vecteurs (fin)

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Séries à termes positifs (fin)

1.1 Séries de Riemann (fin)

Propriété. (Hors programme). $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la ***constante d'Euler***.
Il faut savoir le démontrer.

Hors programme : séries de Bertrand. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
Il faut savoir le démontrer.

1.2 Critère de D'Alembert

Propriété. **Critère de D'Alembert**. Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs, non nuls à partir d'un certain rang, telle que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}$.

- ⋄ Si $l < 1$, $\sum a_n$ est convergente,
- ⋄ Si $l > 1$ ou si $l = 1^+$, $\sum a_n$ diverge grossièrement.
- ⋄ Lorsque $l = 1$, on ne peut conclure. C'est le cas douteux du critère de d'Alembert.

Il faut savoir le démontrer.

Hors programme : Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, alors $a_n = \mathbf{O}(b_n)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$.

2 Séries alternées

2.1 Théorème spécial des séries alternées

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n\alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème des séries spéciales alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée telle que la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. On dit dans ce cas que $\sum a_n$ est une série spéciale alternée. Alors $\sum a_n$ est convergente.

De plus pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \geq n$, la quantité $\sum_{k=n}^{N} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_n) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme. C'est encore vrai lorsque $N = +\infty$, donc pour tout $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, le reste de Cauchy $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_{n+1}) et, pour tout $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Il faut savoir le démontrer.

2.2 Non commutativité des séries semi-convergentes.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Il faut savoir le démontrer.

On peut démontrer (hors programme) que, si $\sum a_n$ est une série semi-convergente de réels, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme ℓ.

Dans un chapitre ultérieur, on montrera que, lorsque $\sum a_n$ est une série absolument convergente, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3 La transformation d'Abel (hors programme)

Transformation d'Abel : Si $(a_n), (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, en posant $X_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$,

pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$, $\sum_{n=p}^{q} a_n x_n = a_q X_q - a_p X_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1} (a_{n+1} - a_n) X_n$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Cette formule ressemble à l'intégration par parties.

Propriété. ***Hors programme : théorème d'Abel.*** Soient (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et $\sum x_n$ une série de vecteurs dont les sommes partielles sont bornées.
Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Exemple. Nature de la série $\sum \frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Topologie dans un espace métrique

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

4 Ouverts et fermés

Définition. Soient $x \in E$ et V une partie de E.
V est un voisinage de x si et seulement s'il existe $r > 0$ tel que $B_o(x, r) \subset V$.
$\mathcal{V}(x)$ désignera l'ensemble des voisinages de x.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé, lorsqu'on remplace la norme sur E par une norme équivalente, pour tout $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ n'est pas modifié.

Propriété. La notion de voisinage satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ Pour tout $x \in E$, $E \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Pour tout $x \in E$ et tout $V \in \mathcal{V}(x)$, si $W \supset V$, alors $W \in \mathcal{V}(x)$.
- ◇ Si $x \in E$ et si $(V, W) \in \mathcal{V}(x)^2$, alors $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $x \in E$, une intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.

Définition. Soit $U \subset E$. U est ouvert si et seulement si U est voisinage de tous ses points.

Propriété. La notion d'ouvert satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.
- ◇ Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- ◇ Si I est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de E, alors $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert de E.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Les ouverts sont exactement les réunions de boules ouvertes.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire est un ouvert.

Propriété. La notion de fermé satisfait les propriétés suivantes :
- ◇ $\emptyset$ et E sont des fermés de E.
- ◇ Une réunion finie de fermés est un fermé.
- ◇ Si I est un ensemble quelconque (éventuellement de cardinal infini) et si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de fermés de E, alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un fermé de E.

Propriété. Les boules fermées (donc en particulier les singletons) sont des fermés.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Toute partie de E de cardinal fini est un fermé de E.

5 Adhérence et intérieur

Définition. Soient $a \in E$ et A une partie de E. On dit que a est un point intérieur de A si et seulement si $A \in \mathcal{V}(a)$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

Ainsi, pour tout $a \in E$, $a \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}(a)$.

Propriété. Soit A une partie de E.
$\overset{\circ}{A}$ est la réunion des ouverts contenus dans A. C'est le plus grand ouvert inclus dans A.

Propriété. Soient A et B deux parties de E.

- $\overset{\circ}{A} \subset A$,
- $\overset{\circ}{A} = A$ si et seulement si A est un ouvert,
- $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,
- $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et
- $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient $a \in E$ et A une partie de E. On dit que a est un point adhérent de A si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap A \neq \emptyset$.
On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. $\overline{A}$ est appelée l'adhérence de A.
Ainsi, pour tout $a \in E$, $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow [\forall V \in \mathcal{V}(a) \;\; V \cap A \neq \emptyset]$.

Propriété. Soit A une partie de E. $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{E \setminus A}}$ et $E \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{E \setminus A}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soit A une partie de E.
$\overline{A}$ est l'intersection des fermés contenant A. C'est le plus petit fermé contenant A.

Propriété. Soient A et B deux parties de E.

- $\overline{A} \supset A$,
- $\overline{A} = A$ si et seulement si A est un fermé,
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
- $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété (hors programme) : Soit (x_n) une suite de points de E.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons $X_N = \{x_n / n \geq N\}$.
Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{X_N}$: il est fermé.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in A$.
On dit que x est isolé dans A si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$.
On dit que x est un point d'accumulation de A si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Propriété. Les points adhérents de A sont les points de E situés à une distance nulle de A.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie de E est dense dans E si et seulement si elle rencontre toutes les boules ouvertes de E.

Propriété. Une partie A de E est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

Définition. Soit $A \subset E$. La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \overset{\circ}{A})$.

Propriété. Soit A une partie de E. $[A \setminus Fr(A)] = \overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} = [A \cup Fr(A)]$.

Propriété. A ouvert $\Longleftrightarrow A \cap Fr(A) = \emptyset$. A fermée $\Longleftrightarrow Fr(A) \subset A$.

6 Caractérisation par les suites

Propriété. $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. A est dense dans E si et seulement si pour tout $l \in E$, il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Propriété. A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a pour limite un élément de A.

Propriété. Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie.
Tout sous-espace vectoriel de G de dimension finie est fermé.

7 Topologie induite sur une partie

Propriété. Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur A sont respectivement les traces sur A des boules centrées dans A, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de E.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si B est une partie de A, l'adhérence de B pour la topologie induite sur A est la trace sur A de l'adhérence de B pour la topologie globale sur E.

Propriété. Soit B une partie de A. B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$.