

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 15 : du lundi 2 février au vendredi 6.

Liste des questions de cours

- 1°) Montrer que $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ définit une norme sur \mathbb{K}^n .
- 2°) En posant $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, montrer que l'ensemble des applications bornées de $[a, b]$ dans \mathbb{K} est un espace vectoriel normé.
- 3°) Montrer que les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.
- 4°) Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E , montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$$
est 1-lipschitzienne.
- 5°) Si E_1, \dots, E_p sont p espaces vectoriels normés, montrer que sur $E_1 \times \dots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.
- 6°) Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|\cdot\|$, montrer que, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{N} l \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|} l$.
- 7°) Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $(x_n) \in E^\mathbb{N}$ telles que $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ et $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$. Montrer que $\alpha_n \cdot x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \cdot x$.
- 8°) Soit (u_n) une suite de scalaires vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Donner une expression de u_n en fonction de n . Démontrez-le.
- 9°) Déterminer la limite en $+\infty$ de $(1 + \frac{1}{n})^n$.
- 10°) Énoncer le théorème de la limite d'une suite monotone. Démontrez-le dans le cas d'une suite croissante majorée.
- 11°) Montrer que a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si
 $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \ d(x_n, a) < \varepsilon$.
- 12°) Énoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{R} .
- 13°) Théorème de Bolzano-Weierstrass dans \mathbb{C} : énoncé et démonstration, en supposant que le théorème est déjà démontré pour les suites de réels.

Thèmes de la semaine : espaces vectoriels, normes et suites

1 Espaces vectoriels

cf programme précédent.

Il serait bon de donner au moins un exercice sur ce thème.

2 Espaces vectoriels normés ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

2.1 Définition d'une norme

Corollaire de l'inégalité triangulaire.

Vecteurs unitaires.

Restriction d'une norme à un sous-espace vectoriel.

Les normes 1, 2 et ∞ sur \mathbb{K}^n .

Hors programme : pour $p \in [1, +\infty[$, $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Normes 1, 2, ∞ , et plus généralement normes $p \in [1, +\infty[$ (hors programme), sur un produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés et sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$.

2.2 Distance

Distance associée une norme.

Définition d'un espace métrique.

Seul cas au programme : une partie A d'un espace vectoriel normé munie de la restriction sur A^2 de la distance associée à la norme est un espace métrique.

Boules ouvertes, boules fermées, sphères.

Boule unité.

Les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.

Dans un espace métrique, distance d'un point à une partie non vide, distance entre deux parties non vides, diamètre d'une partie non vide A noté $\delta(A)$.

Le diamètre d'une boule fermée de rayon r est inférieur à $2r$. Il est égal à $2r$ dans le cas d'un espace vectoriel normé.

Si $\emptyset \neq A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Parties bornées d'un espace vectoriel normé.

Soient A un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé. On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E . Pour $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\|$.

Alors $(\mathcal{B}(A, E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Soit E un espace vectoriel normé. On note $l^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E .

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(E)$, on note $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$: $(l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

2.3 Applications k-Lipschitziennes

Une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Si E est un espace vectoriel normé, l'application $\|\cdot\|$ est 1-lipschitzienne.

Si E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E , l'application $\begin{matrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{matrix}$ est 1-lipschitzienne.

L'application $i^{\text{ème}}$ projection $p_i : \begin{matrix} E_1 \times \dots \times E_p & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{matrix}$ est 1-lipschitzienne lorsque $E_1 \times \dots \times E_p$ est muni de l'une de ses trois normes classiques, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

2.4 Normes équivalentes

$\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id_E : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ et $Id_E : (E, \|\cdot\|_2) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ sont lipschitziennes.

Si E_1, \dots, E_p sont p espaces vectoriels normés, alors sur $E_1 \times \dots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.

Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux normes équivalentes sur E , alors une partie A de E est bornée pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si elle est bornée pour $\|\cdot\|_2$.

Si f est une application lipschitzienne de E dans F , alors elle reste lipschitzienne si l'on remplace dans E et F les normes par des normes équivalentes.

3 Limite d'une suite dans un espace métrique (E, d)

Unicité de la limite.

Suites convergentes, suites divergentes.

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel muni de deux normes équivalentes N et $\|\cdot\|$, alors, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} l \iff x_n \xrightarrow[\|\cdot\| \rightarrow +\infty]{} l$.

Toute suite convergente est bornée.

Notation. Pour la fin de ce paragraphe, on suppose que E est un espace vectoriel normé.

La somme de deux suites convergentes de vecteurs converge vers la somme des limites.

Si $(x_n + y_n)$ converge, alors (x_n) et (y_n) ont la même nature.

Soient $(\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

- Si l'une des suites est bornée et si l'autre tend vers 0, alors $\alpha_n x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- Si $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ et $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, alors $\alpha_n \cdot x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \cdot x$.

Une suite (x_n) à valeurs dans un produit cartésien de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses p suites composantes convergent et dans ce cas, la limite de (x_n) est égale au p -uplet dont les composantes sont les limites des suites composantes.

Propriété similaire pour une suite à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, en fonction des suites coordonnées.

4 Suites de complexes

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(\ell)$ et $\operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(\ell)$.

Suites arithmético-géométriques.

Suites homographiques.

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

5 Suites de réels

5.1 Limites infinies

Divergence vers $+\infty$ (resp : $-\infty$) pour une suite de réels.

Divergence vers ∞ pour une suite d'un espace métrique.

Composition des limites : si $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ (où $x_n \in E$) et $\varphi(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ avec $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, alors $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Pour $x_n \in E$, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ si et seulement si $x_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $x_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.

Limites d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de suites, avec des limites éventuellement infinies.
Formes indéterminées $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour étudier $a_n^{b_n}$ lorsque a_n et b_n dépendent de n , on remplace $a_n^{b_n}$ par $e^{b_n \ln(a_n)}$.

5.2 limites et relation d'ordre

Principe des gendarmes.

Lemme du tunnel : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Si $a < \ell < b$. apcr, $a < u_n < b$.

Le lemme du tunnel est faux avec des inégalités larges.

Si $a_n \leq b_n$, alors dans $\overline{\mathbb{R}}$, sous condition d'existence des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Ce résultat est faux avec des inégalités strictes.

Si X est une partie non vide de \mathbb{R} , il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sup(X)$.

Théorème de la limite monotone.

Comportement asymptotique d'une suite géométrique.

5.3 Suites adjacentes

Si (x_n) et (y_n) sont adjacentes avec (x_n) croissante, alors ces deux suites convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $x_p \leq \ell \leq y_q$.

Théorème des segments emboîtés : Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de segments, décroissante au sens de l'inclusion, dont les longueurs tendent vers 0. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

6 Les suites extraites

On se place dans un espace métrique quelconque.

Si une suite dans E converge vers ℓ , toutes ses suites extraites convergent vers ℓ .

Une suite extraite d'une suite extraite de (x_n) est une suite extraite de (x_n) .

valeurs d'adhérence d'une suite en tant que limite d'une suite extraite.

Propriété. (hors programme). a est une valeur d'adhérence de (x_n) si et seulement si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq N$ $d(x_n, a) < \varepsilon$,
c'est-à-dire si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\{n \in \mathbb{N} / x_n \in B_o(a, \varepsilon)\}$ est infini.

Lemme des pics : De toute suite de réels on peut extraire une suite monotone.

Hors programme : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} x_k$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} x_k$.

Théorème de Bolzano-Weierstrass dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

7 Suites de Cauchy (hors programme)

Toute suite convergente de E est une suite de Cauchy.

Toute suite de Cauchy de E est bornée.

Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence alors elle est convergente.

Espaces métriques complets, espaces de Banach.

Les \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies sont de Banach.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Séries de vecteurs (sauf séries alternées).