

DM 33
Centrale PSI 09 - Math 1
Un corrigé.

1 Réorganisation des termes d'une série semi-convergente.

A.1. On suit la définition de l'énoncé.

```
def suite(x,n):  
    L=[]  
    p=0  
    q=0  
    S=0  
    for k in range(n):  
        if S>x:  
            q=q+1  
            s=2*q-1  
        else:  
            p=p+1  
            s=2*p  
        S=S+((-1)**s/s)  
        L+= [s]  
    return L
```

```
print(suite(-1,70))
```

A.2. Le schéma de l'énoncé n'est pas correct ! Celui-ci a été tracé avec une fonction `suite` où le test sur S_n est $S_n \geq x$ (et non $S_n > x$). cela ne change rien au principe de l'algorithme. On s'arrange pour choisir les s_n de façon que les S_n "oscillent" autour de x et que $S_n \rightarrow x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme positif et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme négatif). Les suites (p_n) et (q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).

B. On démontre ces propriétés par récurrence sur n .

- Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geq 0$). Dans les deux cas, on a les propriétés attendues, en convenant que $\{1, \dots, -1\} = \emptyset = \{2, \dots, 0\}$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geq 1$. On doit encore distinguer deux cas.
 - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les propriétés attendues, car $q_{n+1} + p_{n+1} = 1 + p_n + q_n = 1 + n$ d'après l'hypothèse de récurrence.
 - Si $S_n \leq x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les propriétés attendues.

On en déduit que

$$\text{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$

ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \dots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

C.1. Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ . Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)

$$\exists n_0 / \forall n \geq n_0, |m_n - \ell| \leq 1/3$$

Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leq 2/3$ pour $n, r \geq n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geq n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0 .

C.2.

- a. La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0 . Par définition, on a donc pour tout $n \geq n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geq n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^n u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^n \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$

Le changement d'indice $j = k - 1$ donne la formule voulue. La série associée à

$\left(\frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}\right)_{k \geq n_0}$ est divergente, car son terme général est équivalent à $\frac{1}{2k}$, et positive donc ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \rightarrow -\infty$ ce qui contredit $S_n > x$ pour tout $n \geq n_0$.

- b. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de la limite monotone indique que $p_n \rightarrow +\infty$.

C.3. Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geq n_0$, on a $S_n \leq x$ et $S_n \rightarrow +\infty$ ce qui est incompatible.

C.4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $2p_n \rightarrow +\infty$ et $2q_n - 1 \rightarrow +\infty$, donc il existe N_1 et N_2 dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \geq N_1$, $2p_n \geq k$ et $\forall n \geq N_2$, $2q_n - 1 \geq k$. Prenons $N = \max(N_1, N_2)$.

Alors $k \leq 2p_N$ et $k \leq 2q_N - 1$, donc $k \in \{2, \dots, 2p_N\} \cup \{1, \dots, 2q_N - 1\} = \{s(1), \dots, s(N)\}$, donc il existe $h \in \{1, \dots, N\}$ tel que $k = s(h)$.

s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

D.1. On distingue plusieurs cas.

- Si $S_n > x$ et $S_{n+1} > x$, alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et $x < S_{n+1} < S_n$, donc $|S_{n+1} - x| = S_{n+1} - x \leq S_n - x = |S_n - x|$.
- Si $S_n < x$ et $S_{n+1} < x$, alors $u_{s_{n+1}} > 0$ car s_{n+1} est pair et $x > S_{n+1} > S_n$, donc $|S_{n+1} - x| = -S_{n+1} + x \leq -S_n + x = |S_n - x|$.
- Si $S_n > x$ et $S_{n+1} < x$, alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair donc $|S_n - x| = S_n - x \leq S_n - S_{n+1} = -u_{s_{n+1}} = |u_{s_{n+1}}|$.
- Si $S_n < x$ et $S_{n+1} > x$, alors $u_{s_{n+1}} > 0$ car s_{n+1} est pair donc $|S_n - x| = -S_n + x \leq -S_n + S_{n+1} = u_{s_{n+1}} = |u_{s_{n+1}}|$.

On a donc dans tous les cas

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$

D.2. Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N$, $S_n > x$ (sinon, comme en C.2.a on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N$, $S_n \leq x$ (cette fois comme en C.2.b). Donc il existe $n > N$ tel que $S_{n+1} \leq x < S_n$ (ou l'inverse). Alors d'après la question précédente, $|S_n - x| \leq |u_{s_{n+1}}|$.

D.3. Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geq n_2$) et

$$\forall n \geq \max(n_1, n_2), p_n \geq 1 \text{ et } q_n \geq 1$$

D.4. Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question D.1 montre que

$$|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leq \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leq |u_{2p_{n+1}}| \leq v_n \text{ et } |u_{2q_{n+2}-1}| \leq |u_{2q_{n+1}-1}| \leq v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leq v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0), donc elle est convergente.

Soit $\epsilon > 0$. On sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, or $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc par composition, $u_{2p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_{2q_n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_{2p_n}| \leq \epsilon$ et $|u_{2q_n-1}| \leq \epsilon$.

D'après la question I.D.2, il existe $m > N$ tel que $|S_m - x| \leq |u_{s(m)}| \leq \epsilon$.

Ainsi, $v_m = \max(|S_m - x|, |u_{2p_{m+1}}|, |u_{2q_{m+1}-1}|) \leq \epsilon$.

De plus la suite (v_n) est décroissante, donc pour tout $n \geq m$, $0 \leq v_n \leq \epsilon$.

ceci prouve que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D.5. En particulier $0 \leq |S_n - x| \leq v_n \rightarrow 0$ et $S_n \rightarrow x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

E.1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$: on a $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) + (\ln(n+1) - \ln(n))$, donc

$$u_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1) \right] + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{2k^2}$, donc la série $\sum \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ converge. De plus $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, donc

lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n \rightarrow \gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]$, ce qui prouve déjà que $u_n = \gamma + o(1)$,

donc que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

De plus on montre que pour tout $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$, $\ln(1+x) < x$, par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > 0$

et $\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] > 0$.

E.2. On a alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \ln(2n) - \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{\gamma}{2} + o(1) = \frac{1}{2} \ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1)$$

E.3.

a. D'après I.B, $S_n = \sum_{k=1}^n u_{s(k)}$, mais $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, \dots, 2p_n\} \cup \{1, \dots, 2q_n - 1\}$, et la formule demandée s'en déduit.

b. Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} (\ln(p_n) + \gamma + o(1)) - \left(\frac{1}{2} \ln(q_n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + o(1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right) - \ln(2) + o(1) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln(2) + o(1) \end{aligned}$$

c. Comme $S_n \rightarrow x$, on a $\ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2x + 2 \ln 2 = \ln(4e^{2x})$, donc par (continuité de exp)

$\frac{p_n}{n-p_n} \rightarrow 4e^{2x}$ c'est à dire $\frac{n}{p_n} \rightarrow \frac{e^{-2x}}{4} + 1$ ou encore

$$p_n \sim \frac{4n}{e^{-2x} + 4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n - q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n \sim \frac{n}{1 + 4e^{2x}}$$

d. On prouve comme en a. que

$$\sum_{k=1}^n |u_{s_n}| = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$$

et, comme en b, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^n |u_{s_n}| = \frac{1}{2} \ln(p_n q_n) + \gamma + \ln(2) + o(1) \sim \frac{1}{2} \ln(p_n q_n)$$

Quand $x_n \rightarrow +\infty$ et $x_n \sim y_n$ alors $\ln(y_n) = \ln(x_n(1 + o(1))) = \ln(x_n) + o(1) \sim \ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_n q_n) \sim \ln\left(\frac{4n^2}{(4 + e^{-2x})(1 + 4e^{2x})}\right) \sim 2 \ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{s_1}| + \dots + |u_{s_n}|}{|u_1| + \dots + |u_n|} = 1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).

2 Suites vérifiant (P_1) et (P_2) .

A. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a

$$\forall n, 0 \leq |a_n u_n| \leq M |a_n|$$

La convergence absolue de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(a_n u_n)$ et (P_1) est vérifiée.

B.1. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la convergence de $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum(a_{n+1} - a_n)$ ce qui, en revenant aux sommes partielles et grâce à un télescopage, équivaut à la convergence de la suite (a_n) .

B.2. En posant $U_{-1} = 0$, on a

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^N a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^N a_n U_n - \sum_{n=0}^N a_n U_{n-1}$$

On opère le changement d'indice $k = n - 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir (c'est la transformation d'Abel)

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) U_k$$

Supposons que $\sum(u_n)$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que

$\sum(a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question A indique que $\sum((a_n - a_{n+1})U_n)$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée indique alors que $\sum(a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n) .

C. Posons $u_n = \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. On a alors, $a_n u_n = |a_n|$ (on le vérifie quand $|a_n| \neq 0$ et dans l'autre cas). Ainsi, $\sum (a_n u_n)$ diverge et on a (u_n) qui est bornée puisque formée d'éléments de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1) .

Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont exactement celles dont la série associée converge absolument.

D.1. On applique les définitions de l'énoncé.

```
def a(n):
    if n==0 :
        return 1
    else :
        return 9/(4*(n+1))

def exemple(n):
    p=0
    epsilon=1
    A=a(0)
    liste=[[0,p,epsilon,A]]
    for i in range(n):
        if A>=p:
            p+=1
            epsilon=epsilon/2
            A+=a(i+1)*epsilon
            liste+=[[i+1,p,epsilon,A]]
    return liste
```

```
print(exemple(6))
```

Les six premiers termes trouvés sont

$[[0, 0, 1, 1], [1, 1, 0.5, 1.5625], [2, 2, 0.25, 1.75], [3, 2, 0.25, 1.890625], [4, 2, 0.25, 2.003125],$
 $[5, 3, 0.125, 2.05], [6, 3, 0.125, 2.0901785714285714]]$

D.2.

a. Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N . On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas, ε n'évolue pas) et donc

$$\forall n \geq N, A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^n a_k$$

Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont > 0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \rightarrow +\infty$. Il existe donc $k \geq N$ tel que $A_k \geq p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1 + p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction.

Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1 + p_{n-1}$.

On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N} / n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

b. Pour $k \geq 1$, on a $n_k = \min\{n \in \mathbb{N} / n > n_{k-1} \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\}$ et donc

$$p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}+1} = \dots = p_{n_k-1} \text{ et } p_{n_k} = 1 + p_{n_{k-1}}$$

d'où l'on déduit que

$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{n_{k-1}}$$

Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k, p_{n_k} = k \text{ et } \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

(ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum (a_n \varepsilon_n)$ est croissante et on a une suite extraite qui tend vers $+\infty$ ($A_{n_{k-1}} \geq p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}} = k - 1 \rightarrow +\infty$). On a donc $A_n \rightarrow +\infty$ et $\sum (a_n \varepsilon_n)$ qui diverge.

- c. Au vu des termes calculés en II.D.1 (là l'énoncé fait visiblement une erreur), pour la suite envisagée ici, on a

$$n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5$$

puisque $p_1 = 1, p_2 = 2 = p_3 = p_4$ et $p_5 = 3$.

D.3.

- a. On adapte la fonction *exemple* : notamment la liste construite n'est pas la même et on doit gérer une variable k (notée compteur) supplémentaire, telle que le dernier élément ajouté à la liste est $\{k, n_k\}$.

```
def a(n):
    return 1/(n+1)

def indexer(n):
    p=0
    epsilon=1
    A=a(0)
    liste=[[0,0]]
    compteur=0
    for i in range(n):
        if A>=p:
            p+=1
            epsilon=epsilon/2
            compteur+=1
            liste+=[[compteur,i+1]]
        A+=a(i+1)*epsilon
    return liste

print(indexer(10000))
```

- b. On a vu plus haut que

$$A_{n_k-1} \geq p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k - 1$$

On a $k - 1 = p_{n_{k-1}} = \dots = p_{n_{k-1}}$ et $\frac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_{n_{k-1}} = \dots = \varepsilon_{n_{k-1}}$. Si on suppose que $n_k - 2 > n_{k-1}$ alors $p_{n_k-1} = p_{n_k-2}$, $\varepsilon_{n_k-1} = \varepsilon_{n_k-2}$. Ainsi $A_{n_k-2} < p_{n_k-2}$ (sinon l'indice p aurait augmenté) et

$$A_{n_k-1} = A_{n_k-2} + a_{n_k-1} \varepsilon_{n_k-1} = A_{n_k-2} + \frac{1}{n_k} \frac{1}{2^{k-1}} \leq (k - 1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

On en déduit que

$$A_{n_k} = A_{n_k-1} + a_{n_k} \varepsilon_{n_k} \leq (k - 1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}} + \frac{1}{(1 + n_k) 2^k}$$

Comme $n_k \geq k$ et $k \geq 3$, on en déduit que

$$A_{n_k} \leq k - 1 + \frac{1}{k2^{k-1}} + \frac{1}{(1+k)2^k} \leq k - 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} < k = p_{n_k}$$

et on a donc $p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $\varepsilon_{1+n_k} = \varepsilon_{n_k}$ puis

$$A_{1+n_k} = A_{n_k} + a_{1+n_k} \varepsilon_{1+n_k} = A_{n_k} + \frac{1}{(2+n_k)2^k} \leq k - 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{1}{40} < k = p_{1+n_k}$$

ce qui donne $p_{2+n_k} = p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $n_{k+1} > 2 + n_k$.

c. Par définition,

$$A_{n_{k+1}-1} = A_{n_k-1} + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \varepsilon_j$$

Par définition de n_k et n_{k+1} , les ε_j ci-dessus valent tous $\varepsilon_{n_k} = 1/2^k$ et donc

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j}$$

Une comparaison série-intégrale (avec la fonction décroissante $x \mapsto 1/x$) donne

$$\ln \left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k} \right) = \int_{1+n_k}^{1+n_{k+1}} \frac{dt}{t} \leq \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j} \leq \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right)$$

et on a donc

$$\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k} \right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right)$$

d. Comme $n_3 - 2 = 49 > 2 = n_2$, on montre avec *D.3.b* et une récurrence que

$$\forall k \geq 3, n_k - 2 > n_{k-1}$$

et on a ainsi

$$\forall k \geq 3, k - 1 \leq A_{n_k-1} \leq (k - 1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

Soit $k \geq 3$. On a donc $A_{(n_{k+1}-1)} - A_{(n_k-1)} \geq k - \left((k - 1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}} \right) = 1 - \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$

et $A_{(n_{k+1}-1)} - A_{(n_k-1)} \leq k + \frac{1}{n_{k+1} 2^k} - (k - 1) = 1 + \frac{1}{n_{k+1} 2^k}$, donc

$$1 - \frac{1}{n_k 2^{k-1}} \leq A_{(n_{k+1}-1)} - A_{(n_k-1)} \leq 1 + \frac{1}{n_{k+1} 2^k}.$$

De plus, d'après la question précédente,

$$-\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq -(A_{(n_{k+1}-1)} - A_{(n_k-1)}) \leq -\frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k} \right),$$

donc en sommant ces deux encadrements, on obtient

$$1 - \frac{1}{n_k 2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right) \leq 0 \leq 1 + \frac{1}{n_{k+1} 2^k} - \frac{1}{2^k} \ln \left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k} \right).$$

Ainsi, $2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln \left(\frac{n_{k+1}}{n_k} \right)$ et

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) &\leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) + \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right), \text{ or} \\ -\ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) + \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) &= \ln\left(\frac{1+n_k}{1+n_{k+1}} \times \frac{n_{k+1}}{n_k}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n_k}}{1+\frac{1}{n_{k+1}}}\right), \\ \text{donc } \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) &\leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right).\end{aligned}$$

e. La nature de la suite de terme général $w_k = \ln(n_k) - 2^k$ est la même que celle de la série de terme général

$$w_{k+1} - w_k = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) - 2^k$$

La question précédente donne

$$-\frac{2}{n_k} \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

ce qui entraîne

$$|w_{k+1} - w_k| \leq \frac{2}{n_k} + \ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

$\ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n_{k+1}}\right)$ est le terme général d'une série convergente car la suite de terme général $\ln\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$ converge (elle est de limite nulle puisque $n_k \rightarrow +\infty$). Ainsi, pour prouver que $\sum(w_{k+1} - w_k)$ converge absolument, il suffit de montrer que $\sum(1/n_k)$ converge. Or, on a évidemment

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \varepsilon_k \leq \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et donc, pour k suffisamment grand, $k-1 \leq A_{n_k-1} \leq \ln(n_k)$ ou encore

$$\frac{1}{n_k} \leq e^{-(k-1)}$$

ce qui montre que $\sum(1/n_k)$ est une série positive convergente. Finalement, (w_k) est une suite convergente.

En notant ℓ la limite de la suite (w_k) , la continuité de l'exponentielle donne $e^{w_k} = n_k e^{-2^k} \rightarrow e^\ell$ et donc (comme $e^\ell \neq 0$)

$$n_k \sim C e^{2^k} \quad \text{avec } C = e^\ell$$

On a vu plus haut que si $x_n \sim y_n \rightarrow +\infty$ alors $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$, on en déduit ici (en utilisant deux fois ce résultat) que

$$\ln(n_k) \sim 2^k \quad \text{et} \quad \ln(\ln(n_k)) \sim k \ln(2)$$

La question b donne alors (on a vu que l'inégalité de cette question est valable pour tout $k \geq 3$)

$$A_{n_k-1} \sim k-1 \sim k \sim \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

Soit n un entier. Il existe un entier k tel que $n_k - 1 \leq n \leq n_{k+1} - 1$. On remarque que n_k est de limite infinie quand $n \rightarrow +\infty$ (car $n_{k+1} \geq n+1$). $\ln(\ln(n_k - 1)) \leq \ln(\ln(n)) \leq \ln(\ln(n_{k+1}))$ et majorant et minorant équivalent tous deux à $\ln(\ln(n_k))$ (et aussi à $k \ln(2)$). Ainsi $\ln(\ln(n_k)) \sim \ln(\ln(n))$. De plus on a l'encadrement $A_{n_k-1} \leq A_n \leq A_{n_{k+1}-1}$. Majorant

et minorant sont tous deux équivalents à k c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$ c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}$. On a prouvé que

$$A_n \sim \frac{\ln(\ln(n))}{2}$$

Etant donnée la croissance de la suite (n_k) , la fonction **indexer** risque fort de ne pas nous donner beaucoup d'éléments de cette suite !

E.

a. Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose $\varepsilon'_n = \text{signe}(a_n)\varepsilon_n$. (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum(a_n\varepsilon'_n) = \sum(\varepsilon_n|a_n|)$ converge.

b. Si $\sum|a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question II.D donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum|a_n|\varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum|a_n|$ converge.

F.1. Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N , il existe un entier $n \geq N$ tel que $|a_n| \geq M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n \geq N}$ est bornée et (a_n) l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_k}| \geq 1$ et

$$\forall k \geq 0, n_{k+1} = \min\{n > n_k / |a_n| \geq 2^{k+1}\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k, x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autres x_n étant nuls. $\sum(x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k, |x_{n_k}a_{n_k}| \geq 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum(x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

F.2. Par le même calcul qu'en II.B.2 on a

$$(*) : \sum_{k=0}^n \varepsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque (ε_k) converge) et donc

$\sum(\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k$ converge. De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \rightarrow 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum(\varepsilon_n (a_{n+1} - a_n))$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

F.3. La question II.E montre alors que $\sum|a_{n+1} - a_n|$ converge.

F.4. Au II.B et II.F.3, on a prouvé que les suites vérifiant (P_2) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum|a_{n+1} - a_n|$ converge.