

DM 34 : Un corrigé

Partie I : deux exemples.

1°) Cas d'une suite constante :

Si $\alpha = 0$, alors les suites (a_n) et (a_n^*) sont identiquement nulles, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont convergentes.

Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de

$$\text{Newton, } a_n^* = \frac{\alpha}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \frac{\alpha}{2^n} (1+1)^n = \alpha.$$

En particulier, les suites (a_n) et (a_n^*) ne convergent pas vers 0, donc les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2°) Cas d'une suite géométrique :

◇ D'après le cours, la série géométrique $\sum a_n = \sum z^n$ converge si et seulement si

$$|z| < 1 \text{ et dans ce cas, } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-z}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^n = \frac{(1+z)^n}{2^n}. \text{ Ainsi, } (a_n^*) \text{ est aussi une suite géométrique, mais sa}$$

raison est égale à $\frac{1+z}{2}$. La série $\sum a_n^*$ est donc convergente si et seulement si $|1+z| < 2$, c'est-à-dire si et seulement si le complexe z est dans la boule ouverte de centre -1 et

$$\text{de rayon 2. Dans ce cas, } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1+z}{2}}, \text{ donc } \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1-z}}.$$

◇ $\sum a_n^*$ converge si et seulement si $z \in B_o(-1, 2)$ (boule ouverte de centre -1 et de rayon 2) et $\sum a_n$ converge si et seulement si $z \in B_o(0, 1)$. Si l'on représente ces deux domaines dans le plan complexe, on voit que $B_o(0, 1) \subset B_o(-1, 2)$. On peut le démontrer directement : si $z \in B_o(0, 1)$, alors $|z+1| \leq |z|+1 < 2$, donc $z \in B_o(-1, 2)$. On en déduit déjà que la convergence de $\sum a_n$ implique celle de $\sum a_n^*$.

De plus, lorsque $z = -2$, $z \in B_o(-1, 2) \setminus B_o(0, 1)$, donc $\sum a_n^*$ converge et $\sum a_n$ diverge. Ainsi, la convergence de $\sum a_n^*$ n'implique pas celle de $\sum a_n$.

◇ On suppose que $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $z \in \mathbb{U}$, or on voit sur une figure que $\mathbb{U} \cap B_o(-1, 2) = \mathbb{U} \setminus \{1\}$, donc $\sum a_n^*$ converge si et seulement si $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. On peut le démontrer

directement, car $|1 + e^{i\theta}| = |e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})| = 2|\cos(\frac{\theta}{2})|$, donc $e^{i\theta} \in B_o(-1, 2)$, sauf lorsque $2|\cos(\frac{\theta}{2})| = 2$, c'est-à-dire lorsque $\frac{\theta}{2} \in \pi\mathbb{Z}$. Pour la suite, on suppose donc que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1 - e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} = -\frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}2i\sin(\frac{\theta}{2})} = \frac{i}{\sin(\frac{\theta}{2})}e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*\right) = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}}.$$

Partie II : Comparaison entre (a_n) et (a_n^*) .

3°) Soit $k \in \mathbb{N}$. Lorsque $n \geq k$, $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2^n k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{2^n k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
car d'après les croissances comparées, $\frac{n^k}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4°)

— La suite (a_n) est convergente, donc elle est bornée.

Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

— Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Alors, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} |a_k| + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} |a_k| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} M + \frac{1}{2^n} \sum_{k=N}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

— Poursuivons : on en déduit que $|a_n^*| \leq \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\varepsilon}{2} = b_n + \frac{\varepsilon}{2}$,

par la formule du binôme de Newton, en posant $b_n = \frac{M}{2^n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{n}{k}$.

Or d'après la question précédente, $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N'$, $b_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $P = \max(N, N')$ et soit $n \geq P$. Alors $|a_n^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ceci démontre que $a_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

5°) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_n - \ell$. Alors $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après la question

précédente, on a $b_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, où $b_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_k - \ell) = a_n^* - \ell$.

Ceci démontre bien que $a_n^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

6°) D'après la question 2, lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$, où $z \in \mathbb{C}$, on a $a_n^* = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$. En particulier lorsque $z = -2$, la suite géométrique (a_n) ne converge pas (car $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$) alors que $a_n^* = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, en général, la convergence de la suite (a_n) n'est pas équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) .

Partie III : Comparaison entre $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$.

7°) On procède par récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$.

Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k$.

Lorsque $n = 0$, on calcule $T_0 = a_0^* = a_0$ et $\frac{1}{2^0} \sum_{k=0}^0 \binom{0+1}{k+1} S_k = S_0 = a_0$, d'où $R(0)$.

On suppose maintenant que $R(n)$ est vraie.

Alors $T_{n+1} = T_n + a_{n+1}^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k$.

Dans la seconde somme, on pratique une transformation d'Abel :

en convenant que $S_{-1} = 0$,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_k - \sum_{k=-1}^n \binom{n+1}{k+1} S_k,$$

donc $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \sum_{k=0}^n \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} 2^{n+1} T_{n+1} &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k + \sum_{k=0}^n \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} \right) S_k + S_{n+1}, \end{aligned}$$

donc d'après la formule de Pascal, $2^{n+1} T_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+1} S_k + S_{n+1}$, d'où l'on déduit

$$T_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+2}{k+1} S_k, \text{ ce qui prouve } R(n+1) \text{ si l'on suppose } R(n).$$

Le principe de récurrence permet de conclure.

8°) Notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Ainsi, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1}$, donc si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$S'_n = S_{n-1}$, en convenant toujours que $S_{-1} = 0$, on obtient $T_n = 2 \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S'_k$.
Or $S'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S$, donc en appliquant la question 5 en remplaçant (a_n) par (S'_n) , on obtient
que $T_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2S$. Ceci montre que la série $\sum a_n^*$ est convergente et que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie IV : Rayon de convergence d'une série entière.

9°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n \rho^n| \leq M$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \left| \frac{z}{\rho} \right|^n \leq M r^n$, où $r = \left| \frac{z}{\rho} \right| \in [0, 1[$. La série géométrique $\sum r^n$ est convergente, donc d'après le cours, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

10°) $\diamond 0 \in A$, donc A est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$. Elle possède donc bien une borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

$\diamond$ Supposons que $|z| < R$.

Alors $|z|$ n'est pas un majorant de A , donc il existe $\rho \in A$ tel que $|z| < \rho$.

Ceci impose $\rho > 0$, donc d'après la question précédente, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

$\diamond$ Supposons que $|z| > R$. Alors $|z| \notin A$, donc la suite $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| = |a_n |z|^n|$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

11°) L'existence découle de la question précédente. Il reste à montrer l'unicité.

Soit $S \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que pour tout complexe z , si $|z| < S$, $\sum a_n z^n$ converge et si $|z| > S$, $\sum a_n z^n$ diverge.

Si $S < R$, il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $S < T < R$. Alors $\sum a_n T^n$ est à la fois convergente et divergente, ce qui est faux. On raisonne de même si $R < S$, donc $S = R$.

12°) $\diamond$ Supposons d'abord que $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

$\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l|z|$, donc d'après le critère de d'Alembert, lorsque $|z| < \frac{1}{l}$, $l|z| < 1$ et $\sum a_n z^n$ converge (et c'est encore vrai lorsque $z = 0$), et de même, lorsque $|z| > \frac{1}{l}$, $l|z| > 1$ et $\sum a_n z^n$ diverge. Ainsi, d'après la définition du rayon de convergence, ce dernier est bien égal dans ce cas à $\frac{1}{l}$.

$\diamond$ Supposons que $\ell = 0$. Alors le calcul précédent montre que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum a_n z^n$ converge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à $+\infty = \frac{1}{0}$.

$\diamond$ Supposons enfin que $\ell = +\infty$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\sum a_n z^n$ diverge. Dans ce cas, le rayon de convergence est bien égal à $0 = \frac{1}{+\infty}$.

13°) $\diamond$ Pour la première série entière, $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer la question précédente avec $\ell = 1$: le rayon de convergence de $\sum z^n$ est égal à 1.

$\diamond$ Pour la seconde série entière, $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après la question précédente, le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{(n+1)!}$ est égal à $+\infty$.

14°) $\diamond$ Posons $x_n = \sigma_n - \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \text{ Or la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ est}$$

convergente, donc d'après le cours, la série $\sum (x_n - x_{n-1})$ est aussi convergente, mais cette dernière série est télescopique, donc la suite (x_n) est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème des séries alternées spéciales, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est bien convergente. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est donc la

limite de $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, or $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{2k-1}}{2k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{(2k-1)-1}}{2k-1}$, donc

$$S_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) = \sigma_{2n} - \sigma_n. \text{ Alors d'après}$$

le point précédent, $S_n = (\ln(2n) + \gamma + o(1)) - (\ln n + \gamma + o(1)) = \ln 2 + o(1)$, ce qui

prouve que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$. On a donc montré que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$.

15°) En particulier, $\sigma_n \sim \ln n$, donc lorsque $n \geq 1$, en posant $a_n = \frac{\sigma_n}{n!}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{1}{n+1}. \text{ Or } \ln(n+1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + o(1) \sim \ln n, \text{ donc}$$

$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$ est $+\infty$.

$\diamond$ $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} \sim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim 1$, donc le rayon de convergence de $\sum \sigma_n z^n$ est égal à 1.

Partie V : Exemples d'études de séries entières

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'introduction de cette partie, h est n fois dérivable sur $] -R, R[$, et pour tout $x \in] -R, R[$,

$$h^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} (a_p x^p) = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p p(p-1) \cdots (p-n+1) x^{p-n}, \text{ donc pour } x = 0, \text{ on}$$

obtient $\boxed{h^{(n)}(0) = n! a_n}$.

17°) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 13, $f(x)$ est bien défini. De plus,

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ donc par décalage d'indice (que l'on peut justifier en passant}$$

$$\text{aux sommes partielles), } xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \text{ or d'après le cours } e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\text{donc } xf(x) = e^x - 1. \text{ Ainsi, lorsque } x \neq 0, \boxed{f(x) = \frac{e^x - 1}{x}} \text{ et } f(0) = 1.$$

$$18°) \text{ Lorsque } x \in \mathbb{R}^*, e^{-x}f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n!}, \text{ donc}$$

$$\text{par décalage d'indice, } e^{-x}f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}. \text{ Cette égalité est encore vraie lorsque}$$

$$x = 0, \text{ car } f(0) = 1.$$

Cette nouvelle série entière converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc son rayon de convergence est infini. Alors, d'après l'introduction de cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{(n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}.$$

$$\text{Un dernier décalage d'indice donne}$$

$$\text{alors, pour tout } x \in \mathbb{R}, \boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n)!n}}.$$

$$\text{Ainsi, } b_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \boxed{b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!n}}.$$

19°) $\diamond$ D'après la question 15, le rayon de convergence de $\sum \frac{\sigma_n z^n}{n!}$ vaut $+\infty$, donc d'après les résultats admis par l'énoncé en début de partie, g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En particulier, g' est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, toujours d'après les résultats admis en début de partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sigma_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma_{n+1} x^n}{n!},$

$$\text{donc } g'(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sigma_{n+1} - \sigma_n)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}. \text{ Ainsi, } \boxed{g' - g = f}.$$

$\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $h(x) = e^{-x}g(x)$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^{-x}(g'(x) - g(x)) = e^{-x}f(x) = F'(x)$, donc il existe D tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) + D$. Or, en $x = 0$, $h(0) = g(0) = \sigma_0 = 0$ et $F(0) = 0$, donc $D = 0$. Ainsi, $h = F$, ce qui prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^x F(x)$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 16, $g^{(n)}(0) = \sigma_n$. Par ailleurs, d'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{d^p}{dx^p}(F(x)) \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}(e^x),$

or toujours d'après la question 15 et d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$F^{(p)}(0) = p!b_p = \frac{(-1)^{p-1}}{p} \text{ et } F(0) = 0. \text{ Ainsi, } g^{(n)}(0) = \sum_{p=1}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^{p-1}}{p}.$$

$$\text{On a donc bien montré que pour tout } n \in \mathbb{N}, \sigma_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

20°) $\diamond$ Notons $\mathcal{D}_\phi$ le domaine de définition de ϕ . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D}_\phi$ si et seulement si la série $\sum \sigma_n x^n$ est convergente.

D'après la question 15, $] -1, 1[\subset \mathcal{D}_\phi \subset [-1, 1]$.

De plus, $\sigma_n \sim \ln n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\sum \sigma_n$ et $\sum (-1)^n \sigma_n$ divergent grossièrement donc

$$\boxed{\mathcal{D}_\phi =] -1, 1[}.$$

$\diamond$ D'après l'introduction de cette partie, pour tout $x \in [0, 1[$, $\phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \sigma_n x^{n-1} \geq 0$

donc ϕ est croissante sur $[0, 1[$.

21°) Si on pose $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $k \geq 1$ et $a_0 = 0$, on a d'après la question 19 :

$$\frac{\sigma_n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k = a_n^*.$$

De plus d'après la question 14, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ln 2$. Alors d'après la

question 8, $\sum a_n^*$ est également convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. On en déduit que

$$\boxed{\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma_n}{2^n} = 2 \ln(2)}.$$