

Feuille d'exercices 15.

Topologie

Exercice 15.1 : (niveau 1)

Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1) \sin(z) < e^{x+z} \text{ et } x + y - z > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15.2 : (niveau 1)

Montrer que $\{x + iy \in \mathbb{C} / x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 3, x^3 + y^3 - 3xy \geq 0\}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 15.3 : (niveau 2)

Si F est un fermé d'un espace métrique, montrer qu'il existe une suite décroissante d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Exercice 15.4 : (niveau 2)

On note $E = l^\infty(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. F est-il un ouvert ou un fermé de E ?

Exercice 15.5 : (niveau 2)

Soit X un espace métrique compact.

Montrer que X possède une partie dense et dénombrable.

Exercice 15.6 : (niveau 2)

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E .

On note $\delta(A)$ le diamètre de A .

Montrer que $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. A-t-on $\delta(A) = \delta(\overset{\circ}{A})$?

Exercice 15.7 : (niveau 2)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E tel que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Montrer que $F = E$.

Exercice 15.8 : (niveau 2)

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et F est un fermé de E .

1°) Soit K une partie compacte de E .

Montrer que $F + K = \{f + k / (f, k) \in F \times K\}$ est fermé.

2°) On pose $F = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ et $K = \{(x, e^x) / x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F et K sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $F + K$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15.9 : (niveau 2)

Soit A et B deux ouverts d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que $A + B$ est ouvert. Est-ce vrai avec des fermés ?

Exercice 15.10 : (niveau 2)

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé E . Montrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence **dans** E .

Exercice 15.11 : (niveau 2)

Soit E un espace vectoriel normé et P une partie de E .

On dit que P est discrète si et seulement si tous les points de P sont des points isolés de P .

La réunion de deux parties discrètes est-elle toujours discrète ?

Montrer que la réunion de deux parties discrètes et fermées est discrète et fermée.

Exercice 15.12 : (niveau 2)

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont aussi convexes.

Exercice 15.13 : (niveau 3)

Théorème du point fixe. Soit A une partie complète non vide d'un espace métrique E et $f : A \rightarrow A$ une application k -contractante où $k \in [0, 1[$.

1°) Montrer qu'il existe au plus un vecteur $l \in E$ tel que $f(l) = l$ (on dit que l est un point fixe de f).

2°) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N} \ x_{n+1} = f(x_n)$, avec $x_0 \in A$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x_0, x_1)$.

b) Montrer que (x_n) converge et que sa limite est un point fixe de f .

Exercice 15.14 : (niveau 3)

On note E l'ensemble des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, que l'on munit de la norme infinie (norme de la convergence uniforme).

$$P_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ 1^\circ) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on note } x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

Déterminer la limite de la suite (P_n) d'éléments de E .

2°) On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynomiales de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas complet, en tant que partie de l'espace vectoriel normé E muni de la norme infinie.

3°) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace complet.

Exercice 15.15 : (niveau 3)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels telle que la suite $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ converge vers 1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 15.16 : (niveau 3)

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère la relation $\mathcal{U}$ sur U définie par :

$$\forall x, y \in U, (x \mathcal{U} y) \iff ([x, y] \subset U),$$

où $[x, y]$ désigne le segment joignant x à y même lorsque $x > y$.

1°) Démontrer que $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence sur U .

2°) Démontrer que les classes d'équivalence de U sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Justifier que l'ensemble quotient $U/\mathcal{U}$ est dénombrable.

3°) Qu'a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 15.17 : (niveau 3)

$l^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites bornées de réels ; c'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme infinie.

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des fermés de $l^\infty(\mathbb{R})$:

- ◇ l'ensemble des suites croissantes bornées,
- ◇ l'ensemble des suites bornées admettant 0 pour valeur d'adhérence,
- ◇ l'ensemble $\mathcal{P}_T$ des suites T -périodiques, où $T \in \mathbb{N}^*$,
- ◇ la réunion $\bigcup_{T \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_T$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 15.18 : (niveau 1)

Si A est dense dans B et si B est dense dans C , montrer que A est dense dans C .

Exercice 15.19 : (niveau 2)

Soit A une partie non vide de E (où E est un espace vectoriel normé). Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $B(A, \alpha) = \{x \in E / d(x, A) < \alpha\}$.

1°) Montrer que $B(A, \alpha) = \bigcup_{x \in A} B_o(x, \alpha)$.

2°) Montrer que $\overline{A} = \bigcap_{\alpha > 0} B(A, \alpha)$.

3°) En déduire que $\overline{A}$ est une intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 15.20 : (niveau 2)

On suppose que A est une partie dense de B .

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_p$ p éléments de A .

Montrer que $A \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ est dense dans $B \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$.

Exercice 15.21 : (niveau 2)

Montrez que si U et V sont deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé, alors $\overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \emptyset$.

Exercice 15.22 : (niveau 2)

On se place dans un espace vectoriel normé noté E . Soit P une partie de E .

On dit que P est discrète si et seulement si tous ses points sont des points isolés de P .

Montrer qu'une partie P d'un espace vectoriel normé E est discrète et fermée si et seulement si il n'existe aucun point d'accumulation de P .

Exercice 15.23 : (niveau 2)

A est un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $B \in \mathcal{P}(E)$.

1°) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2°) Montrer que $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

3°) Si B est dense dans E , montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

4°) Si A et B sont denses dans E , montrer que $A \cap B$ est dense dans E .

5°) Donner un exemple de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

Exercice 15.24 : (niveau 2)

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A et B sont deux parties de E . On suppose que A est ouvert. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Exercice 15.25 : (niveau 2)

On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.

Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A . Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, \dots, b_p$ p éléments de B . Montrer que $B \setminus \{b_1, \dots, b_p\}$ est dense dans A .

Exercice 15.26 : (niveau 2)

On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.

Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A . Montrer que pour tout $a \in A$ et pour tout voisinage V de a , $V \cap B$ est infini.

Exercice 15.27 : (niveau 2)

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et A une partie de E . On dit que $l \in E$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $l \in \overline{A \setminus \{l\}}$.

Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A est un fermé.

Exercice 15.28 : (niveau 2)

On munit $C([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence en moyenne.

1°) Pour tout entier $n \geq 3$, on note f_n l'élément de E défini par les relations suivantes. $f_n(t) = 0$ lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = n(t - \frac{1}{2})$ lorsque $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 1$ lorsque $t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$.

Montrer que f_n est une suite de Cauchy de E .

2°) Montrer que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice 15.29 : (niveau 2)

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E .

Montrer que $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 15.30 : (niveau 2)

Pour quels réels α l'ensemble $\{m^\alpha \argsh(n) / m, n \in \mathbb{N}^*\}$ est-il dense dans $\mathbb{R}_+$?

Exercice 15.31 : (niveau 3) Montrer que $l^1(\mathbb{C})$ est un espace de Banach.

Exercice 15.32 : (niveau 3) On note $E = l^1(\mathbb{C}) = \{(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum_{n=0}^{+\infty} |z_n| < +\infty\}$ et on note A l'ensemble des suites géométriques (u_n) de E telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

A est-il fermé? A est-il ouvert?

Exercice 15.33 : (niveau 3) Soit S un ensemble non dénombrable de réels.

1°) Montrer que S admet au moins un point d'accumulation ℓ , ce qui signifie que $\ell \in \overline{S \setminus \{\ell\}}$.

2°) Montrer que S possède au moins un ensemble dénombrable de points d'accumulation.

3°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation est un fermé.

4°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de S n'est pas dénombrable.