

DM 35 : Théorème de Tychonov

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni le jeudi 12 février.

Ce sujet a été donné en devoir surveillé en 2024/2025, en début d'année. Aussi, même s'il s'agit d'un problème de topologie, seul le cours sur la théorie des ensembles est supposé connu, tout le reste est établi au fil des questions posées.

Partie I : Topologies

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$;
- Pour tout $A, B \in \mathcal{T}$, $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- Pour tout ensemble I , pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E , si pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Soit d une application de E^2 dans $\mathbb{R}$. On dit que d est une distance sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

- pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$;
- pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- pour tout $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- pour tout $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1°) Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, on pose $d(x, y) = |x - y|$.

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{C}$.

2°) On suppose que d est une distance sur un ensemble E .

Pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}$: cet ensemble est appelé la boule ouverte de centre a et de rayon r .

Lorsque A est une partie de E , on dit que A est un ouvert de E si et seulement si, pour tout $a \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Montrer que l'ensemble des ouverts de E est une topologie sur E .

Montrer que, pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est effectivement un ouvert.

Par la suite, lorsque $\mathcal{T}$ est une topologie sur un ensemble E , les éléments de $\mathcal{T}$ seront appelés des ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$.

3°) On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E .

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $A_1, \dots, A_n$ sont n éléments de $\mathcal{T}$, alors $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \in \mathcal{T}$.

Montrer qu'en général, une intersection d'une infinité d'ouverts pour la topologie $\mathcal{T}$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{T}$.

Partie II : Topologie produit

On suppose que I est un ensemble non vide et que $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles non vides.

Pour tout $i \in I$, on suppose que $\mathcal{T}_i$ est une topologie sur E_i .

On note E l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que, pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

On dit que E est le produit de la famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$.

Pour tout $i \in I$, si $x = (x_j)_{j \in I} \in E$, on note $p_i(x) = x_i$.

4°) Montrer que, pour tout $i \in I$, p_i est une application surjective de E dans E_i .

Une partie A de E est appelée un ouvert élémentaire si et seulement si

- il existe un ensemble J tel que
 - J est fini ;
 - $J \subset I$;
- Pour tout $j \in J$, il existe $A_j \in \mathcal{T}_j$ tel que
- $A = \{x \in E \mid \forall j \in J, p_j(x) \in A_j\}$.

5°) Montrer que A est un ouvert élémentaire de E si et seulement si A est le produit d'une famille d'ensembles à préciser.

6°) Montrer que $\emptyset$ est un ouvert élémentaire.

Montrer que l'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des réunions d'ouverts élémentaires. Plus précisément, si A est une partie de E , $A \in \mathcal{T}$ si et seulement si il existe un ensemble K et une famille $(A_k)_{k \in K}$ d'ouverts élémentaires telle que $A = \bigcup_{k \in K} A_k$.

7°) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E .

$\mathcal{T}$ est appelée la topologie produit sur E .

Partie III : Espaces séparés

On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E . On dit que E est séparé (pour la topologie $\mathcal{T}$) si et seulement si, pour tout $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe $U, V \in \mathcal{T}$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

8°) Donner un exemple d'ensemble E et de topologie $\mathcal{T}$ tels que E n'est pas séparé.

9°) On suppose que E est un ensemble et que d est une distance sur E .

On note $\mathcal{T}$ la topologie définie en question 2 à partir de la distance d .

Montrer que E est séparé pour la topologie $\mathcal{T}$.

10°) On reprend les notations et les hypothèses de la partie II.

Montrer que E est séparé pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si, pour tout $i \in I$, E_i est séparé pour la topologie $\mathcal{T}_i$.

Partie IV : Filtres

Soit E un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E si et seulement si on dispose des propriétés suivantes :

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $E \in \mathcal{F}$;
- pour tout $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$;
- pour tout $A \in \mathcal{F}$, pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \subset B$, alors $B \in \mathcal{F}$.

11°) Soit E un ensemble et A une partie non vide de E .

Montrer que $\{B \in \mathcal{P}(E) / A \subset B\}$ est un filtre sur E .

12°) On suppose que $\mathcal{T}$ est une topologie sur un ensemble E . Soit $x \in E$.

Pour tout $V \in \mathcal{P}(E)$, on dira que V est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U$ et $U \subset V$.

Pour toute la suite de ce problème, on notera $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

Montrer que $\mathcal{V}(x)$ est un filtre sur E .

13°) Soit E un ensemble et $\mathbb{F}$ un ensemble non vide de filtres sur E tel que, pour tout $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathbb{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Montrer que $\bigcup_{\mathcal{F} \in \mathbb{F}} \mathcal{F}$ est un filtre sur E .

14°) Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$. On suppose que $\mathcal{A}$ est non vide.

Montrer qu'il existe un filtre $\mathcal{F}$ sur E tel que $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ si et seulement si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i \neq \emptyset$.

Partie V : Adhérence

On suppose jusqu'à la fin que E est un ensemble muni d'une topologie $\mathcal{T}$.

Lorsque $A \subset E$, on dira simplement que A est ouvert pour dire que A est un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$.

De même, pour tout $x \in E$, lorsque $V \in \mathcal{V}(x)$ (voir question 12), on dira simplement que V est un voisinage de x .

Lorsque A est une partie de E , on note $\overset{\circ}{A} = \{x \in E / A \in \mathcal{V}(x)\}$.

$\overset{\circ}{A}$ s'appelle l'intérieur de A .

15°) Soit A une partie de E .

Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est égal à la réunion des ouverts inclus dans A .

Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert inclus dans A .

Montrer que A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

Lorsque F est une partie de E , on dira que F est un fermé si et seulement si $E \setminus F$ est ouvert.

Si A est une partie de E , on pose $\overline{A} = E \setminus \overset{\circ}{(E \setminus A)}$. $\overline{A}$ s'appelle l'adhérence de A . C'est le complémentaire de l'intérieur du complémentaire de A .

16°) Soit A une partie de E .

Montrer que $\overline{A}$ est un fermé contenant A .

Montrer que A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Par la suite, on dira simplement que $\mathcal{F}$ est un filtre pour dire que $\mathcal{F}$ est un filtre sur E .

Lorsque $\mathcal{F}$ est un filtre et que $x \in E$, on dit que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$ si et seulement si $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.

On dit également que $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{V}(x)$.

17°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit $x \in E$.

Si $\mathcal{F}$ converge vers x , montrer que x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

18°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre et soit x un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

Montrer qu'il existe un filtre $\mathcal{F}'$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$ et tel que $\mathcal{F}'$ converge vers x .

On dit qu'un filtre $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si il est maximal au sens de l'inclusion, c'est-à-dire si et seulement si aucun filtre ne contient strictement $\mathcal{F}$.

19°) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre et $x \in E$.

Montrer que $\mathcal{F}$ converge vers x si et seulement si x est un point d'adhérence de $\mathcal{F}$.

20°) Soit $\mathcal{F}$ un filtre. Montrer que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \in \mathcal{F}$ ou $(E \setminus A) \in \mathcal{F}$.

Partie VI : Compacité

On dit que E est compact si et seulement si E est séparé et si, pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de E (où I est un ensemble quelconque non vide) telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$,

il existe $J \subset I$ avec J finie et non vide telle que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

On admet le lemme de Zorn : soit $(G, \leq)$ un ensemble ordonné.

On appelle une chaîne de G toute partie de G qui est totalement ordonnée par $\leq$.

Lorsque toutes les chaînes de G sont majorées, G possède au moins un élément maximal.

21°) On suppose que E est séparé.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E est compact ;
2. Tout filtre de E possède un point d'adhérence ;
3. Tout ultrafiltre de E converge vers un élément de E .

22°) On reprend les notations et les définitions de la partie II. Ainsi, E est le produit de la famille $(E_i)_{i \in I}$, chaque E_i est muni d'une topologie $\mathcal{T}_i$ et E est muni de la topologie produit $\mathcal{T}$.

On suppose que, pour tout $i \in I$, E_i est compact. Montrer que E est compact. Il s'agit du théorème de Tychonov (1930).