

DM 36 : un corrigé

Ce problème correspond au sujet Mines-Ponts 2007 MP, à quelques aménagements près.

1 Préliminaires

1°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_k = T_k - T_{k-1}$, même lorsque $k = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^m \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^m u_k (T_k - T_{k-1}) \\ &= \sum_{k=n}^m u_k T_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} u_{k+1} T_k \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m - u_n T_{n-1}. \end{aligned}$$

2°) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^N (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^N (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Soit $t \in [0, x]$. Alors $-t^2 \neq 1$, donc on sait que $\sum_{n=0}^N (-t^2)^n = \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2}$. On en

déduit que $\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1 - (-t^2)^{N+1}}{1 + t^2} dt$, or $\int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} dt = \arctan x$, donc

$$\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + (-1)^N I_N, \text{ en posant } I_N = \int_0^x \frac{(t^2)^{N+1}}{1 + t^2} dt.$$

Or, par croissance de l'intégrale, lorsque $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq I_N \leq \int_0^x t^{2N+2} dt = \frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Lorsque $-1 \leq x \leq 0$, on a de même

$$0 \leq -I_N \leq \int_x^0 t^{2N+2} dt = -\frac{x^{2N+3}}{2N+3} \leq \frac{1}{2N+3} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, dans les deux cas, d'après le principe des gendarmes, $I_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit que $\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \arctan x$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) D'après la propriété C, $\chi(1) = \chi(1 \times 1) = \chi(1)\chi(1)$, donc $\chi(1) \in \{0, 1\}$.

Si $\chi(1) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\chi(a) = \chi(a \times 1) = \chi(a)\chi(1) = 0$, donc χ est nulle, ce qui est faux. Ainsi, $\chi(1) = 1$.

4°) $\diamond$ Soit $k, h \in \mathbb{Z}$ tels que $\bar{k} = \bar{h}$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $k = h + \alpha N$, or χ est N -périodique, donc $\chi(k) = \chi(h)$. Ainsi la quantité $\chi(k)$ ne dépend que de $\bar{k}$, ce qui permet bien de définir l'application $\tilde{\chi}$.

De plus χ est non nulle, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\chi(k) \neq 0$. Alors $\tilde{\chi}(\bar{k}) \neq 0$, donc $\tilde{\chi}$ est également non nulle.

$\diamond$ Soit $\alpha \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha = \bar{a}$. D'après le cours, a est premier avec N , donc d'après l'identité de Bezout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ua + vN = 1$. Alors $1 = \chi(1) = \chi(ua + vN) = \chi(ua) = \chi(u)\chi(a)$, donc $\tilde{\chi}(\alpha) = \chi(a) \neq 0$. On peut donc considérer la restriction $\tilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$.

D'après la propriété C, on a immédiatement que,

pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\chi}(\bar{a} \times \bar{b}) = \chi(ab) = \tilde{\chi}(\bar{a}) \times \tilde{\chi}(\bar{b})$, donc $\tilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$ est un morphisme de groupes multiplicatifs.

2 Cas particuliers

5°) On a vu que $\chi(1) = 1$, or χ est 2-périodique, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\chi(2n+1) = 1$. D'après la propriété A, $\chi(0) = 0$, donc par 2-périodicité, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\chi(2n) = 0$. Ceci détermine entièrement l'application χ .

Réciproquement, cette application vérifie bien les 4 axiomes de l'énoncé.

6°) $\chi(3) = \chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2 = \chi((-1) \times (-1)) = \chi(1) = 1$, donc $\chi(3) = \chi(-1) \in \{1, -1\}$.

7°) $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\chi(3) = -1$ et χ est 4-périodique, donc si $k \equiv 3 \pmod{4}$, alors $\chi(k) = -1$.

De même, $\chi(1) = 1$, donc si $k \equiv 1 \pmod{4}$, alors $\chi(k) = 1$.

Enfin, si $k \equiv 0 \pmod{4}$ ou $k \equiv 2 \pmod{4}$, alors k et 4 ne sont pas premiers, donc d'après la propriété B, $\chi(k) = 0$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\chi(2k) = 0$ et $\chi(2k+1) = (-1)^k$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, par sommation par paquets,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{\chi(2k)}{2k} + \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \frac{\chi(2k+1)}{2k+1},$$

or $0 \leq 2k+1 \leq n \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2} \iff 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{\chi(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \text{ d'après la question 2.}$$

3 Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n}$

8°) D'après le cours, pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$, $\bar{k} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ si et seulement si k est premier avec N , c'est-à-dire si et seulement si $k \in P$.

$$\text{Ainsi, } \prod_{k \in P} ak = \prod_{k \in P} \bar{a}\bar{k} = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \bar{a}x.$$

Mais $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, donc l'application $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ $x \mapsto \bar{a}x$ est une bijection,

dont la bijection réciproque est $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ $x \mapsto \bar{a}^{-1}x$. Ainsi, par changement de

variable, on obtient que $\prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \bar{a}x = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, c'est-à-dire, en tenant compte du fait

que $\varphi(N) = |P| = |(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*|$, $\bar{a}^{\varphi(N)} \left(\prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x \right) = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, donc, en multipliant

par l'inverse de ce produit (dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$), on obtient que $\bar{a}^{\varphi(N)} = 1$. Ainsi, $\bar{a}^{\varphi(N)} \equiv 1 [N]$, ce qu'il fallait démontrer.

9°) D'après la question 4, en notant $f = \tilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$, on peut écrire :

$1 = \chi(1) = \tilde{\chi}(\bar{1}) = f(\bar{1}) = f(\bar{a}^{\varphi(N)}) = f(\bar{a})^{\varphi(N)}$, car f est un morphisme de groupes, or $f(\bar{a}) \in \mathbb{R}^*$, donc $f(\bar{a}) \in \{-1, 1\}$. Mais $f(\bar{a}) = \tilde{\chi}(\bar{a}) = \chi(a)$, donc $|\chi(a)| = 1$.

10°) On adopte un raisonnement analogue à la question 8 :

D'après la propriété B, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k \in P} \chi(ak)$, donc en posant toujours $f = \tilde{\chi}|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}^{\mathbb{R}^*}$,

$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k \in P} f(\bar{a}\bar{k}) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(\bar{a}x)$. Alors par le même changement de variables

qu'en question 8, on en déduit que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, mais le calcul que l'on

vient d'écrire prouve, avec $a = 1$, que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} f(x)$, donc on a bien montré

$$\text{que } \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

11°) $\diamond$ Ainsi, $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. En choisissant a tel

que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé, on obtient que $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$,

donc $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = \sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $x_{n+1} - x_n = \chi(n+N) - \chi(n) = 0$ d'après la propriété D. Ainsi, la suite (x_n) est constante et $x_0 = 0$, donc elle est identiquement nulle. Ceci démontre

que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0$.

12°) Par division euclidienne de m par N , il existe $q, h \in \mathbb{N}$ tels que $m = qN + h$ avec $0 \leq h \leq N-1$. Alors, par sommation par paquets,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \chi(k) &= \sum_{k=0}^m \chi(k) \\ &= \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^m \chi(k) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^m \chi(k) \end{aligned}$$

or d'après la question précédente, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) = 0$,

donc $\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=qN}^{qN+h} \chi(k) = \sum_{k=0}^h \chi(k)$, par N -périodicité de χ .

Ainsi, $\sum_{k=1}^m \chi(k) = \sum_{k=1}^h \chi(k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} \chi(k)$ (d'après la propriété B). Alors, par inégalité

triangulaire, $\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq h \\ k \in P}} |\chi(k)| \leq \sum_{k \in P} |\chi(k)|$, mais d'après la question 9, pour

tout $k \in P$, $|\chi(k)| = 1$, donc $\left| \sum_{k=1}^m \chi(k) \right| \leq |P| = \varphi(N)$.

13°) ◇ D'après la question 12, $T_n = \mathbf{O}(1)$, or $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$,

donc $T_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \mathbf{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. On sait que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série

$\sum_{n \geq 1} T_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est absolument convergente.

◇ Afin d'utiliser la question 1, posons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = \chi(k)$ et $u_k = \frac{1}{k}$. Posons également $\alpha_0 = 0 = \chi(0)$ et $u_0 = 0$.

Alors, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=1}^n \alpha_k u_k = -u_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_n T_n$.

$$T_0 = 0, \text{ donc } \sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k} = \frac{T_n}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

La suite (T_n) est bornée d'après la question précédente, donc $\frac{T_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus la série $\sum_{n \geq 1} T_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ est absolument convergente, donc elle converge. On en déduit

que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{\chi(k)}{k}$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

4 Comportement asymptotique

14°) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons D_k l'ensemble des entiers naturels qui divisent k .

Notons $n = \prod_{p \in \mathbb{P}_1} p^{v_p}$ et $m = \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{v_p}$ les décompositions de n et m en produit de nombres

premiers, où $\mathbb{P}_1$ (respectivement : $\mathbb{P}_2$) désigne l'ensemble des nombres premiers qui divisent n (respectivement m). n et m sont premiers entre eux, donc $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 = \emptyset$.

Soit $a \in D_{nm}$. Alors on sait que la décomposition de a en produit de nombres premiers est de la forme $a = \prod_{p \in \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2} p^{k_p}$, où pour tout $p \in \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$, $0 \leq k_p \leq v_p$. Ainsi, en

posant $b = \prod_{p \in \mathbb{P}_1} p^{k_p}$ et $c = \prod_{p \in \mathbb{P}_2} p^{k_p}$, on peut affirmer que $a = bc$ avec $b \in D_n$ et $c \in D_m$.

Réciproquement, il est évident que si $b \in D_n$ et $c \in D_m$, alors bc est un diviseur de nm .

En résumé, $D_{nm} = \{bc \mid b \in D_n \text{ et } c \in D_m\}$, donc l'application $\begin{matrix} D_n \times D_m & \longrightarrow & D_{nm} \\ (b, c) & \longmapsto & bc \end{matrix}$ est une surjection. C'est même une bijection, car si $bc = b'c'$ avec $b, b' \in D_n$ et $c, c' \in D_m$, alors $b \mid b'c'$ et $b \wedge c' = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $b \mid b'$. De même on établit que $b' \mid b$, donc $b = b'$, puis $c = c'$.

En utilisant cette bijection pour effectuer un changement de variables, on obtient

$$f_{nm} = \sum_{a \in D_{nm}} \chi(a) = \sum_{(b,c) \in D_n \times D_m} \chi(bc) = \sum_{b \in D_n} \sum_{c \in D_m} \chi(b)\chi(c), \text{ d'après la propriété C.}$$

$$\text{Ainsi, par distributivité généralisée, } f_{nm} = \left(\sum_{b \in D_n} \chi(b) \right) \times \left(\sum_{c \in D_m} \chi(c) \right) = f_n f_m.$$

15°) p étant premier, les diviseurs de p^α sont les p^β avec $0 \leq \beta \leq \alpha$.

$$\text{Ainsi, } f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p^\beta). \text{ De plus, pour tout } \beta \in \mathbb{N}, \chi(p^\beta) = \chi(p)^\beta, \text{ donc } f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \chi(p)^\beta.$$

D'après la question 9, $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$.

Si $\chi(p) = 1$, alors $f_{p^\alpha} = \alpha + 1$.

Si $\chi(p) = 0$, alors $f_{p^\alpha} = 1$.

Il reste le cas où $\chi(p) = -1$. Alors $f_{p^\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} (-1)^\beta = \frac{1 - (-1)^{\alpha+1}}{1 - (-1)}$. Cette quantité est nulle lorsque α est impair et elle vaut 1 lorsque α est pair.

$$\text{En résumé, } f_{p^\alpha} = \begin{cases} \alpha + 1 & \text{si } \chi(p) = 1 \\ 1 & \text{si } \chi(p) = 0 \\ 0 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{si } \chi(p) = -1 \text{ et } \alpha \text{ pair} \end{cases}.$$

16°) Comme n possède au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\chi(k) \leq 1$, on obtient que $f_n \leq n$.

La décomposition de n en produit de nombres premiers s'écrit : $n = \prod_{i=1}^q p_i^{\alpha_i}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers au moins égaux à 1. D'après la question 14, généralisée par récurrence à un produit d'un nombre fini d'entiers naturels deux à deux premiers entre eux, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n = \prod_{i=1}^q f_{p_i^{\alpha_i}}$. Or d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $f_{p^\alpha} \geq 0$, donc $f_n \geq 0$.

17°) Reprenons les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2} = \prod_{i=1}^q f_{p_i^{2\alpha_i}}$. Or, à la question 15, avec α pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p) \in \{-1, 0, 1\}$, $f_{p^\alpha} > 0$. Donc $f_{n^2} > 0$. Or f_{n^2} est dans $\mathbb{Z}$, $f_{n^2} \geq 1$.

18°) $\diamond$ Supposons que $|x| > 1$. Alors $|f_{n^2} x^{n^2}| \geq |x|^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc d'après le principe des gendarmes, $f_{n^2} x^{n^2}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. On en déduit que $f_n x^n$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc d'après le cours, la série $\sum_{n \geq 1} f_n x^n$ est divergente.

$\diamond$ Supposons maintenant que $|x| < 1$.

D'après la question 16, $|f_n x^n| = \mathbf{O}(n|x|^n)$, donc $|f_n x^n| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car, d'après les croissances comparées, $n^3|x|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ceci montre que la série $\sum_{n \geq 1} f_n x^n$ est absolument convergente, donc elle converge.

19°) Soit $x \in [\frac{1}{2}, 1[$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n x^n \geq 0$, donc

$$\sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^M f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^M x^{n^2} = \sum_{n=1}^M g(n), \text{ si l'on pose, pour tout } t \in [1, +\infty[,$$

$$g(t) = x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}. g \text{ est continue et décroissante sur } [1, +\infty[, \text{ car } \ln x < 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a donc : $g(n) = \int_n^{n+1} g(t) dt \geq \int_n^{n+1} g(t) dt$.

Donc $\sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^M \int_n^{n+1} g(t) \, dt = \int_1^{M+1} g(t) \, dt.$

Effectuons le changement de variable $u = t\sqrt{-\ln x}$:

$$\int_1^{M+1} g(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{-\ln x}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} e^{-u^2} \, du \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} e^{-u^2} \, du, \text{ car } -\ln x \leq \ln 2.$$

Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq \sum_{n=1}^{M^2} f_n x^n \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} e^{-u^2} \, du.$

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} e^{-u^2} \, du \right)_{M \in \mathbb{N}^*}$ est donc majorée, or elle est croissante,

donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^{(M+1)\sqrt{-\ln x}} e^{-u^2} \, du \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$ et on a $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n \geq L.$

De plus l'application $h : A \mapsto \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{\sqrt{\ln 2}}^A e^{-u^2} \, du$, de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, il existe $L' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que $h(A) \xrightarrow[A \rightarrow +\infty]{} L'.$ Alors par composition des limites, $h((M+1)\sqrt{-\ln x}) \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} L',$ mais on vient de voir que $h((M+1)\sqrt{-\ln x}) \xrightarrow[M \rightarrow +\infty]{} L,$ donc par unicité de la limite $L' = L.$

On a donc montré que $f(x) \geq L' = \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^A e^{-u^2} \, du.$