

DM 37 : un corrigé

Partie I : Séries indexées par $\mathbb{Z}$.

1°) La suite $\left(\sum_{n=0}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante divergente de réels positifs, donc

d'après le théorème de la limite monotone, $\sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$. Ceci justifie l'écriture

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

2°) $\diamond$ Commençons par montrer que ces différentes quantités sont bien définies.

$\mathcal{S} = \left\{ \sum_{k=M}^N u_k \mid M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc d'après le cours, cet ensemble possède une borne supérieure à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que l'on notera S pour cette question.

De même, $\mathcal{S}' = \left\{ \sum_{k=-N}^N u_k \mid N \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{S}'$ possède un sup éventuellement égal à $+\infty$, que l'on notera S' .

De plus la suite $\left(\sum_{k=-N}^N u_k\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de réels, donc d'après le théorème de la limite monotone, elle possède une limite éventuellement égale à $+\infty$.

$\diamond$ Toujours d'après le théorème de la limite monotone, $\left(\sum_{k=-N}^N u_k\right)_{N \rightarrow +\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} S'$, ce qui montre la dernière égalité.

$\diamond$ Clairement, $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$, donc d'après le cours, $S' \leq S$.

$\diamond$ Soit $M, N \in \mathbb{Z}$ avec $M \leq N$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $[M, N] \cap \mathbb{Z} = [-P, P] \cap \mathbb{Z}$.

Or, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k \in \mathbb{R}_+$, donc $\sum_{k=M}^N u_k \leq \sum_{k=-P}^P u_k = \sum_{k=0}^P u_k + \sum_{k=0}^{P-1} u_{-k-1}$, donc

$$\sum_{k=M}^N u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} u_{(-k-1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$ est un majorant de $\left\{ \sum_{k=M}^N u_k / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$, donc est plus grand que le plus petit des majorants, qui par définition de la borne supérieure est égale à S (par la suite, ce raisonnement sera résumé sous l'appellation de "passage à la borne supérieure"). On a donc montré que $S \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k$.

◇ Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=-N}^N u_k = \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=0}^{N-1} u_{-k-1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} u_{-k-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k, \text{ donc } S' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k.$$

On a montré que $S' \leq S \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = S'$, donc

$$S = S' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=-N}^N u_k \right), \text{ ce qu'il fallait montrer.}$$

◇ D'après la première égalité appliquée à la suite $(u_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_{k+1} &= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M}^N u_{k+1} / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\ &= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M+1}^{N+1} u_k / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\ &= \sup \left(\left\{ \sum_{k=M}^N u_k / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k. \end{aligned}$$

3°) ◇ Supposons que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ est absolument convergente. Cela signifie que les séries usuelles $\sum u_n$ et $\sum u_{-n-1}$ sont absolument convergentes. D'après le cours sur les séries, on peut affirmer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n-1}$ sont convergentes, donc d'après l'énoncé, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ est convergente.

◇ Posons $u_0 = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, posons $u_k = \frac{1}{k}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=-N}^N u_k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} + \sum_{k=-1}^{-N} \frac{1}{k} = 0$, donc la suite $\left(\sum_{k=-N}^N u_k \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. Cependant, d'après le cours, la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ diverge, donc la série

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k$ n'est pas convergente.

Partie II : Quelques espaces de suites.

4°) $\diamond$ La suite identiquement nulle est bornée, donc $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est non vide.

Soit $u, v \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\alpha u_k + v_k| \leq |\alpha| |u_k| + |v_k| \leq |\alpha| \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. On en déduit que $\alpha u + v \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, donc que $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, qui est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel d'après le cours.

$\diamond$ On en déduit également par passage à la borne supérieure

que $\|\alpha u + v\|_\infty \leq |\alpha| \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

En particulier avec $\alpha = 1$, on obtient l'inégalité triangulaire.

En particulier avec $v = 0$, on obtient que $\|\alpha u\|_\infty \leq |\alpha| \|u\|_\infty$. De plus, si $\alpha \neq 0$, en remplaçant dans cette inégalité le couple (α, u) par le couple $(\frac{1}{\alpha}, \alpha u)$, on obtient $\|u\|_\infty \leq \frac{1}{|\alpha|} \|\alpha u\|_\infty$, ce qui prouve que $\|\alpha u\|_\infty = |\alpha| \|u\|_\infty$. De plus cette dernière égalité est évidente lorsque $\alpha = 0$, donc on a prouvé l'homogénéité de $\|\cdot\|_\infty$.

De plus, pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, il est clair que $\|u\|_\infty \geq 0$

et que $\|u\|_\infty = 0 \iff \sup_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| = 0 \iff u = 0$.

Ceci démontre que $\|\cdot\|_\infty$ est bien une norme sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $c_n = (\delta_{k,n})_{k \in \mathbb{Z}}$. c_n est clairement un élément de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. D'après le cours, $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ (l'ensemble des suites presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$), donc en particulier c'est une famille libre de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Elle est de cardinal infini, donc $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est de dimension infinie. On peut redémontrer que la famille $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre : soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{Z})}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n c_n = 0$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. La k -ième composante de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n c_n$ vaut

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \delta_{n,k} = \alpha_k, \text{ donc pour tout } k \in \mathbb{Z}, \alpha_k = 0, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

5°) $\diamond$ La série identiquement nulle est absolument convergente, donc $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est non vide. Soit $u, v \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Notons $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha u_k + v_k| \leq |\alpha| |u_k| + |v_k|$, or par linéarité des séries usuelles, $\sum_{k \in \mathbb{N}} (|\alpha| |u_k| + |v_k|)$ converge, donc la série usuelle $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha u_k + v_k)$ est absolument convergente.

De même, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|\alpha u_{-1-k} + v_{-1-k}| \leq |\alpha| |u_{-1-k}| + |v_{-1-k}|$ et on en déduit également que la série usuelle $\sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha u_{-1-k} + v_{-1-k})$ est absolument convergente.

Ainsi, on a montré que $\alpha u + v \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, donc que $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

$\diamond$ On en déduit aussi par sommation que $\|\alpha u + v\|_1 \leq |\alpha| \|u\|_1 + \|v\|_1$, puis comme lors de la question précédente, on montre que $\|\cdot\|_1$ satisfait l'inégalité triangulaire et la propriété d'homogénéité.

De plus, pour tout $u \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, il est clair que $\|u\|_1 \geq 0$

et si $\|u\|_1 = 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| \in \left\{ \sum_{k=M}^N |u_k| / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\}$,

donc $|u_k| \leq \sup \left(\left\{ \sum_{k=M}^N u_k / M, N \in \mathbb{Z}, \text{ avec } M \leq N \right\} \right) = \|u\|_1 = 0$, donc $u = 0$. Ceci

démontre que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

◇ Avec les notations définies lors de la question précédente, il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, donc on en déduit à nouveau que $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est de dimension infinie.

6°) ◇ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = 1$. La série usuelle $\sum 1$ diverge grossièrement, donc $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Cependant, il est clair que $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

◇ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = q^k$.

Si $|q| > 1$, alors $|q^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $u \notin l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et par divergence grossière, $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Si $|q| < 1$, avec $q \neq 0$ par hypothèse, alors $|q^{-1-n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $u \notin l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Si $|q| = 1$, par divergence grossière, $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|q^n| = 1$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

◇ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = q^{|k|}$.

Si $|q| > 1$, alors $|q^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $u \notin l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ et par divergence grossière, $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Si $|q| < 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| = |q|^{|k|} \leq 1$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. De plus, d'après le cours sur les séries géométriques, $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{-1-k}|$ sont convergentes, donc

$u \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

Si $|q| = 1$, par divergence grossière, $u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|q^n| = 1$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

◇ Supposons que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $u_k = \frac{1}{(1 + |k|)^\alpha}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|u_k| = e^{-\alpha \ln(1+|k|)} \leq 1$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

De plus, lorsque k tend vers $+\infty$, $|u_k| = u_k \sim \frac{1}{k^\alpha}$ et $|u_{-k-1}| \sim \frac{1}{k^\alpha}$, donc d'après le cours sur les séries de Riemann, $\left[\text{lorsque } \alpha > 1, u \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \text{ et lorsque } \alpha \leq 1, u \notin l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \right]$.

7°) La suite constante égale à 1 est dans $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ mais elle n'appartient pas à $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, donc $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \not\subset l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Les séries usuelles $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{-1-k}|$ sont convergentes,

donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N, N' \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et pour tout $n \geq N'$, $|u_{-n}| \leq \varepsilon$. Avec $\varepsilon = 1$, on en déduit

qu'il existe $N, N' \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq 1$ et pour tout $n \geq N'$, $|u_{-n}| \leq 1$. Posons $M = \max_{n \in]-N', N[\cap \mathbb{N}} |u_n|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \max(M, 1)$, donc $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Ceci prouve que $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \subset l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

8°) $\diamond$ Supposons que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ dans $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$|x_{n,k} - x_k| \leq \sup_{h \in \mathbb{Z}} |x_{n,h} - x_h| = \|X_n - X\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par principe des gendarmes, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_k$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, posons $x_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq n \\ 0 & \text{si } |k| > n \end{cases}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, posons $x_k = 1$.

Ainsi, $X \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque $n \geq |k|$, $x_{n,k} = 1$, donc $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = x_k$.

Cependant, Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $x_k - x_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } |k| \leq n \\ 1 & \text{si } |k| > n \end{cases}$, donc

$\|X_n - X\|_\infty = 1$, ce qui prouve que X_n ne converge pas vers X lorsque n tend $+\infty$.

Ce contre-exemple établit que la réciproque est fausse.

9°) $\diamond$ Supposons que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ dans $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$|x_{n,k} - x_k| \leq \sum_{h=-\infty}^{+\infty} |x_{n,h} - x_h| = \|X_n - X\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par principe des gendarmes,

$x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_k$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = c_n$ (cf question 4).

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} = \delta_{n,k}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque $n > |k|$, $x_{n,k} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Posons $X = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, avec, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_k = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_k$, $X \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|X_n - X\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_{n,k}| = 1$, donc X_n ne tend pas vers

X lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce contre-exemple établit que la réciproque est fausse.

10°) On suppose que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ où $\ell \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors par inégalité triangulaire,

$\|x_p - x_q\| = \|(x_p - \ell) + (\ell - x_q)\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

donc la suite (x_n) est une suite de Cauchy de E .

11°) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Fixons $h \in \mathbb{Z}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais $|x_{p,h} - x_{q,h}| \leq \|X_p - X_q\|_\infty$, donc $|x_{p,h} - x_{q,h}| \leq \varepsilon$. Ceci

démontre que la suite $(x_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{K}$, or $\mathbb{K}$ est complet, donc il existe $x_h \in \mathbb{K}$ tel que $x_{n,h} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_h$, lorsque h est fixé.

Soit à nouveau $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$,

$\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \varepsilon$.

Fixons $k \in \mathbb{Z}$ et $p \geq N$. Faisons tendre q vers $+\infty$. Comme $x_{q,k} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} x_k$, on déduit de l'inégalité précédente que $|x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$, donc la suite $(x_{p,k} - x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est bornée et
(1) : $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$.

Posons $X = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. On vient d'établir que, pour $p \geq N$, $X_p - X \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, or $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, donc $X = X_N - (X_N - X) \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

Alors (1) s'écrit $\|X_p - X\|_\infty \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$.

On a montré que toute suite de Cauchy de $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est convergente, donc $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet.

12°) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = (x_{n,k})_{k \in \mathbb{Z}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \|X_p - X_q\|_1$, donc la première partie de la question précédente s'adapte.

Ainsi, il existe $X = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq N$ et $q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_1 \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=-M}^M |x_{p,k} - x_{q,k}| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{p,k} - x_{q,k}| = \|X_p - X_q\|_1 \leq \varepsilon$.

Fixons $M \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq N$. Faisons tendre q vers $+\infty$. Comme $x_{q,k} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} x_k$, on déduit de

l'inégalité précédente que $\sum_{k=-M}^M |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$, donc d'après la question 2, $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_{p,k} - x_k|$

est convergente et en passant au sup dans l'inégalité (1), $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{p,k} - x_k| \leq \varepsilon$.

On vient d'établir que, pour $p \geq N$, $X_p - X \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, or $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, donc $X = X_N - (X_N - X) \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

Alors (1) s'écrit $\|X_p - X\|_1 \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$.

On a montré que $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet.

Partie III : Théorème du point fixe.

13°) Soit $l, l' \in E$. Supposons que l et l' sont deux points fixes de f .

Alors $\|l - l'\| = \|f(l) - f(l')\| \leq k\|l - l'\|$, donc $(1 - k)\|l - l'\| \leq 0$, or $1 - k > 0$, donc $\|l - l'\| \leq 0$. Ceci prouve que $l = l'$. Ainsi, si f admet un point fixe, il est unique.

14°) $\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ la propriété suivante : $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n \|x_0 - x_1\|$.
 $R(0)$ est évidente car $k^0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $R(n-1)$ est vraie.

Alors $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\|$, d'après l'hypothèse de récurrence. Ceci prouve $R(n)$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - x_{n+1}\| \leq k^n\|x_0 - x_1\|$.

◇ Montrons que (x_n) est une suite de Cauchy.

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Par télescopage, $x_p - x_q = \sum_{i=p}^{q-1} (x_i - x_{i+1})$, donc d'après

l'inégalité triangulaire, $\|x_p - x_q\| \leq \sum_{i=p}^{q-1} \|x_i - x_{i+1}\|$. Alors d'après le point précédent,

$$\|x_p - x_q\| \leq \sum_{i=p}^{q-1} k^i \|x_0 - x_1\| = \|x_0 - x_1\| k^p \frac{1 - k^{q-p}}{1 - k} \leq k^p \frac{\|x_0 - x_1\|}{1 - k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. $k \in [0, 1[$, donc $k^n \frac{\|x_0 - x_1\|}{1 - k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $k^n \frac{\|x_0 - x_1\|}{1 - k} \leq \varepsilon$.

Soient $p \geq N$ et $q \geq N$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $q \geq p$.

Alors $\|x_p - x_q\| \leq k^p \frac{\|x_0 - x_1\|}{1 - k} \leq \varepsilon$.

◇ (x_n) est donc une suite de Cauchy, or E est complet, donc la suite (x_n) converge vers une limite $l \in E$. De plus, f est continue car elle est k -lipschitzienne, donc $x_{n+1} = f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(l)$. Or par composition des limites, $x_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$. Ainsi, par unicité de la limite, $l = f(l)$.

15°) Soit $y \in E$. Pour tout $x \in E$, $x - f(x) = y \iff f(x) + y = x \iff g(x) = x$, en posant

$$g : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto f(x) + y.$$

Pour tout $x, x' \in E$, $\|g(x) - g(x')\| = \|f(x) - f(x')\| \leq k\|x - x'\|$, donc on peut appliquer les deux questions précédentes en remplaçant f par g .

E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, donc il possède au moins un élément, par exemple 0. On peut ainsi poser $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$. On sait alors que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ où l est un point fixe de g . Ceci montre donc l'existence d'un point fixe de g et ce dernier est unique d'après la question 13. Ainsi, l'équation $x - f(x) = y$, en l'inconnue $x \in E$ avec y fixé, possède une unique solution. Ceci prouve que $\text{Id}_E - f$ est une bijection.

Partie IV : L'opérateur shift

16°) Soit $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} S(\alpha u + v) &= S((\alpha u_k + v_k)_{k \in \mathbb{Z}}) = (\alpha u_{k+1} + v_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}} \\ &= \alpha(u_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}} + (v_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}} = \alpha S(u) + S(v), \end{aligned}$$

donc S est un endomorphisme sur $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

Notons R l'application de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ dans lui-même définie par : pour tout $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $R(u) = (u_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$. Il est clair que, pour tout $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, $S(R(u)) = R(S(u)) = u$, donc R et S sont deux bijections, réciproques l'une de l'autre.

Ceci démontre que S est un automorphisme de $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$.

17°) $\diamond$ Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. $\{u_{k-1} / k \in \mathbb{Z}\} = \{u_k / k \in \mathbb{Z}\}$, donc la suite $S(u)$ est bornée. Ainsi, $S(u) \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, ce qui prouve que S après restriction réalise un endomorphisme sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$. Il en de même pour R , donc S après restriction est encore un automorphisme sur $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

De plus, $\|S(u)\|_\infty = \sup(\{u_{k-1} / k \in \mathbb{Z}\}) = \|u\|_\infty$.

En particulier, pour tout $u \in l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, $\|S(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, donc d'après le cours, l'application linéaire S est continue.

$\diamond$ Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

D'après la fin de la question 2, (1) : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_{k+1}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |u_k| = \|u\|_1$.

Si l'on pose $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}} = S(u)$, on en déduit que les sommes partielles des séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} |v_k|$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} |v_{(-k-1)}|$ sont majorées par $\|u\|_1$, donc que ces séries sont absolument convergentes. Ainsi, $S(u) \in l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ et d'après la relation (1), $\|S(u)\|_1 = \|u\|_1$. C'est encore vrai avec R , en adaptant la question 2, donc comme avec $l^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, on en déduit que S après restriction est un automorphisme continu sur $l^1(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$.

18°) $\diamond$ $S - \alpha \text{Id}_E = -\alpha(\text{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S)$: supposons d'abord que $|\alpha| > 1$.

Alors, pour tout $u, v \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$, d'après la question précédente,

$\|\frac{1}{\alpha}S(u) - \frac{1}{\alpha}S(v)\|_p = \frac{1}{|\alpha|}\|S(u - v)\|_p = \frac{1}{|\alpha|}\|u - v\|_p$, donc $\frac{1}{\alpha}S$ est k -lipschitzienne avec $k = \frac{1}{|\alpha|} \in]0, 1[$. D'après les questions 11 et 12, $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{K})$ est complet, donc d'après la question 15, $\text{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S$ est bijective. De plus, $-\alpha \text{Id}_E$ est un automorphisme d'après le cours, donc par composition, $S - \alpha \text{Id}_E = (-\alpha \text{Id}_E) \circ (\text{Id}_E - \frac{1}{\alpha}S)$ est un automorphisme de E .

$\diamond$ Supposons maintenant que $|\alpha| < 1$.

Alors $S - \alpha \text{Id}_E = S \circ (\text{Id}_E - \alpha S^{-1}) = S \circ (\text{Id}_E - \alpha R)$.

Comme précédemment, on montre que αR est $|\alpha|$ -lipschitzienne, avec $|\alpha| \in [0, 1[$, donc $\text{Id}_E - \alpha R$ est une bijection, puis par composition, $S - \alpha \text{Id}_E$ est encore un automorphisme de E .

19°) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P_0 . Alors $0 = P_0(z) = a_{j_0} z^{j_0} + \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ j \neq j_0}} a_j z^j$, donc par

inégalité triangulaire, $|a_{j_0}| |z|^{j_0} \leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ j \neq j_0}} |a_j| |z|^j$.

Supposons que $|z| = 1$. Alors l'inégalité précédente devient $|a_{j_0}| \leq \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ j \neq j_0}} |a_j|$ ce qui est

faux car l'énoncé suppose que $a_{j_0} > \sum_{\substack{0 \leq j \leq N \\ j \neq j_0}} |a_j|$. Ainsi, z n'est pas de module 1.

20°) $\diamond$ Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in E$. Lorsque $j \in \mathbb{N}$, notons S^j l'opérateur de E obtenu en composant S avec lui-même j fois. Par récurrence, on montre aisément que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $S^j(x) = (x_{k+j})_{k \in \mathbb{Z}}$. On en déduit que $\left(\sum_{j=0}^N a_j x_{k+j}\right)_{k \in \mathbb{Z}} = \sum_{j=0}^N a_j S^j(x)$, donc

l'équation (1) s'écrit : $b = \sum_{j=0}^N a_j S^j(x)$, ou encore $b = P_0(S)(x)$,

en convenant que, lorsque $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n X^n$ est un polynôme à coefficients complexes,

$$P(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n S^n.$$

$\diamond$ Pour résoudre cette question, il suffit donc de montrer que $P_0(S)$ est une bijection de E dans E . Nous allons montrer, que

(2) : $P_0(S) = a_N(S - \alpha_1 \text{Id}_E) \circ (S - \alpha_2 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \alpha_N \text{Id}_E)$. Cela permettra de conclure car, pour tout $i \in \mathbb{N}_N$, $|\alpha_i| \neq 1$ d'après la question précédente, donc d'après la question 18, $S - \alpha_i \text{Id}_E$ est un automorphisme de E , et par composition, on en déduit que $P_0(S)$ est également un automorphisme de E .

$\diamond$ Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n X^n$ un polynôme à coefficients complexes, où (p_n) est donc une suite

presque nulle de complexes. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Posons $Q = (X - \alpha)P$.

En convenant que $p_{-1} = 0$, $Q(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n X^{n+1} - \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha p_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) X^n$,

donc $Q(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) S^n$.

Par ailleurs, en calculant dans l'algèbre $L(E)$,

$$\begin{aligned} (S - \alpha \text{Id}_E) \circ P(S) &= S \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n S^n - \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n S^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n S^{n+1} - \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n S^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (p_{n-1} - \alpha p_n) S^n, \text{ donc on a établi que,} \end{aligned}$$

pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $[(X - \alpha)P](S) = (S - \alpha \text{Id}_E) \circ P(S)$.

Par une récurrence immédiate, on en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, pour tout $M \in \mathbb{N}$,

pour tout $\beta_1, \dots, \beta_M \in \mathbb{C}$, $\left[\left[\prod_{j=1}^M (X - \beta_j)\right]P\right](S) = (S - \beta_1 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \beta_M \text{Id}_E) \circ P(S)$.

Appliquons cette égalité lorsque $P = a_N$, $M = N$, $(\beta_1, \dots, \beta_N) = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. On obtient $P_0(S) = (S - \alpha_1 \text{Id}_E) \circ (S - \alpha_2 \text{Id}_E) \circ \cdots \circ (S - \alpha_N \text{Id}_E) \circ P(S)$, ce qui conclut cette question car avec $P = a_N = a_N X^0$, $P(S) = a_N S^0 = a_N \text{Id}_E$.

21°) $\diamond$ *Existence* : Notons $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ l'unique solution de l'équation (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

Par hypothèse, $b_k \in \mathbb{R}$, donc $b_k = \text{Re}(b_k) = \text{Re}\left(\sum_{j=0}^N a_j z_{k+j}\right) = \sum_{j=0}^N a_j \text{Re}(z_{k+j})$. Ainsi,

la suite $(\operatorname{Re}(z_k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une solution de (1).

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $|\operatorname{Re}(z_k)| \leq |z_k|$, donc $(\operatorname{Re}(z_k))_{k \in \mathbb{Z}} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. On a donc prouvé l'existence d'une solution de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$.

◇ *Unicité* : $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \subset l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, donc si x et y sont deux solutions de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, ce sont aussi deux solutions de (1) dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, donc d'après l'unicité de la question précédente, $x = y$.

En conclusion, on a montré que l'équation (1) admet une unique solution dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Elle est égale à l'unique solution dans $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, dont les composantes sont donc réelles.