

DS 6 : Énoncé.

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Sommes de séries divergentes

On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f et calculer $f(x)$ en fonction de e^{-x} , pour tout $x \in D_f$.

2°) Pour tout $x \in D_f$, calculer $f'(x)$ en fonction de e^{-x} .

Montrer que, pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = - \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$.

3°) Calculer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, lorsque x est au voisinage de 0, avec $x > 0$, $(1 - e^{-x})^2 = x^2(1 + \alpha x + \beta x^2 + o(x^2))$.

En déduire la valeur de $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} \right) - \frac{1}{x^2} \right)$.

Pour la suite de ce problème, on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de complexes.

On rappelle que, lorsque g est une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ et que $\ell \in \mathbb{C}$, $g(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{ } \ell$ si et seulement si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, \alpha[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

On se propose de montrer dans les questions 5 et 6 que si $\sum a_n$ est convergente, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{ } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

4°) Réciproquement, si l'on suppose que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il

existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}]{ } S$, la série $\sum a_n$ est-elle toujours convergente ?

5°) On suppose que la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x > 0$, $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n (1 - e^{-nx}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

6°) Pour cette question, on suppose seulement que $\sum a_n$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On convient que $A_{-1} = 0$.

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-nx}$.

On pose $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) - A = (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - A) e^{-nx}.$$

En déduire que l'on a encore $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x>0]{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Problème 2 : Approximation uniforme d'une fonction périodique par des polynômes trigonométriques

Notations : Dans tout le problème, les lettres n et p désignent des entiers strictement positifs et la lettre k désigne un entier de signe quelconque.

Les lettres t et x désignent des variables réelles.

Partie I : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

On pose, pour tout réel t , non multiple de π

$$f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin t}.$$

1°) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $f_n(t)$ sous la forme d'une somme finie d'exponentielles complexes, puis sous la forme d'une somme finie de cosinus.

Montrer que la fonction f_n peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ en entier. Ce prolongement sera noté également f_n dans ce qui suit. On précisera la valeur de $f_n(k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt$.

2°) Montrer que, lorsque n est impair, $I_n = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que, lorsque n est pair, en posant $n = 2m$, $I_n = 2 \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

3°) Montrer que $\int_0^{\pi/2} \tan \frac{t}{2} \sin(2nt) dt \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} 0$.

En déduire que $I_{2n+1} - I_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

a) Prouver la convergence de la série de terme général u_n .

b) Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_n(t))^{2p} dt.$$

5°) pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$.

En déduire que pour tout entier $n > 0$ et tout entier $p > 0$, $J_{n,p} \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p-1}$.

6°) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$(f_n(t))^2 = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{n,k} e^{2ikt}$$

où les $\lambda_{n,k}$ sont des réels que l'on calculera.

Calculer $J_{n,p}$ lorsque $p = 1$ et $p = 2$.

Partie II : Module de continuité

Jusqu'à la fin de ce problème, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodique de période 2π et de classe C^1 .

7°) Lorsque $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on note $A(\delta) = \{|f(x) - f(y)| / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |x - y| \leq \delta\}$.

Montrer que l'on peut définir le réel $\omega(\delta) = \sup(A(\delta))$, que l'on appelle le module de continuité de f .

Montrer qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, $\omega(\delta) \leq K\delta$.

8°) Montrer que la fonction ω est croissante.

9°) Soit $\delta > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.

En déduire que pour tout $\lambda > 0$, $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t > 0$, $\omega(2t) \leq (2nt + 1)\omega(\frac{1}{n})$.

10°) Montrer que $\omega(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Partie III : Polynômes trigonométriques

11°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(nt)| \leq n|\sin t|$.

12°) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p > 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $K_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(f_n(t))^{2p} dt$.

En décomposant cette intégrale de 0 à $\frac{\pi}{2}$ sous la forme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}$, montrer

que $K_{n,p} \leq \frac{\pi^2}{8(p-1)}(pn^{2p-2} - 1)$.

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$U_{n,p}(x) = \frac{1}{4J_{n,p}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times \left(f_n\left(\frac{t-x}{2}\right)\right)^{2p} dt.$$

13°) Vérifier que $U_{n,p}$ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une application de la forme

$$U_{n,p}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et où a_0, a_k et b_k désignent des nombres complexes que l'on ne cherchera pas à calculer.

14°) Etablir l'égalité $U_{n,p}(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t))f_n^{2p}(t) dt$.

En déduire que $U_{n,p}(x) - f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x))f_n^{2p}(t) dt$.

15°) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Montrer qu'il existe un nombre $M(p)$ tel que pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega(\frac{1}{n})$.

Vérifier en particulier que $M(2) = 6$ convient.

En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, la suite d'applications $(U_{n,p})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - U_{n,p}(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.