

DS 6 : Corrigé

Barème, sur un total de 76 points

- Premier problème : 20 points : 2,3,2+2,2,2+2,2+3
- Second problème : 56 points
 - Partie I, 29 points : 3+1,1+2,3+3,1+1,2+2,5+5.
 - Partie II, 10 points : 4,1,3+2 (question 10 comprise)
 - Partie III, 17 points : 1,4,3,3,3+2+1.

Problème 1 : Sommes de séries divergentes

1°) Pour $x \in \mathbb{R}$, le terme général $e^{-nx} = (e^{-x})^n$ est celui d'une série géométrique de raison e^{-x} . D'après le cours, cette série converge si et seulement si $|e^{-x}| < 1$, ce qui équivaut à $-x < 0$, soit $x > 0$. L'ensemble de définition est donc $D_f =]0, +\infty[$.

Pour tout $x \in D_f$, d'après le cours :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-x})^n = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

2°) Ainsi, f est clairement C^1 sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^N ne^{-nx} &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^N (e^{-x})^n \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1 - (e^{-x})^{N+1}}{1 - e^{-x}} \right) \\ &= \frac{(N+1)e^{-(N+1)x}(1 - e^{-x}) - e^{-x}(1 - (e^{-x})^{N+1})}{(1 - e^{-x})^2}, \end{aligned}$$

or pour x fixé dans \mathbb{R}_+^* , $(N+1)e^{-(N+1)x} = (N+1)(e^{-x})^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ d'après les

croissances comparées, donc $-\sum_{n=0}^N ne^{-nx} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$, ceci prouve que $\sum ne^{-nx}$

est une série convergente et que $f'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$.

3°) \diamond D'après le cours, au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, or $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc par changement de variables, $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

On en déduit que $1 - e^{-x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2))$,
 puis que $(1 - e^{-x})^2 = x^2(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2))^2 = x^2(1 - x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{3} + o(x^2))$. Ainsi,

$$\boxed{(1 - e^{-x})^2 = x^2(1 - x + \frac{7}{12}x^2 + o(x^2))} : \boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = \frac{7}{12}}.$$

◇ En réduisant au même dénominateur, $\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 e^{-x} - (1 - e^{-x})^2}{x^2(1 - e^{-x})^2}$, donc
 d'après le résultat précédent, en simplifiant par x^2 ,

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{(1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (1 - x + \frac{7}{12}x^2 + o(x^2))}{(x + o(x))^2} = \frac{-\frac{1}{12}x^2 + o(x^2)}{x^2(1 + o(1))^2}.$$

Ainsi, $\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{(1 + o(1))^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}$.

Ceci démontre que $\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}\right) - \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}}$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = (-1)^n$. $\sum a_n$ diverge grossièrement. On va montrer
 cependant que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et qu'il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} S. \text{ Ceci prouvera que la réciproque est fautive.}$$

Soit $x > 0$. $\sum a_n e^{-nx} = \sum (-e^{-x})^n$, or $|-e^{-x}| < 1$, donc il s'agit d'une série géométrique
 convergente. Ainsi, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \text{ En particulier, } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}, \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

5°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n e^{-nx}| \leq |a_n|$, or $\sum |a_n|$ est convergente, donc d'après le cours,
 $\sum a_n e^{-nx}$ est aussi absolument convergente. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

la quantité $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n (1 - e^{-nx})$ est bien définie.

◇ Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n (1 - e^{-nx}) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| (1 - e^{-nx}) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|.$$

Or $\sum |a_n|$ est convergente, donc d'après le cours, $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, ce qui précède montre que, pour tout $x > 0$, $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n (1 - e^{-nx}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

◇ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - e^{-nx}) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n (1 - e^{-nx}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (1 - e^{-nx}) \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $a_n(1 - e^{-nx}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $\sum_{n=0}^N a_n(1 - e^{-nx}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\left| \sum_{n=0}^N a_n(1 - e^{-nx}) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| \leq \varepsilon$.

Ce qui est encadré montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

6°) ◇ Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les suites (a_n) et (A_n) sont convergentes donc elles sont bornées : $a_n = O(1)$ et $A_n = O(1)$. Ainsi $a_n e^{-nx} = O((e^{-x})^n)$ et $A_n e^{-nx} = O((e^{-x})^n)$, or $\sum e^{-nx}$ est absolument convergente en tant que série géométrique de raison strictement

inférieure à 1, donc les quantités $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-nx}$ sont bien définies.

◇ Soit $N \in \mathbb{N}$. On effectue une transformation d'Abel :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N a_n e^{-nx} &= \sum_{n=0}^N (A_n - A_{n-1}) e^{-nx} = \sum_{n=0}^N A_n e^{-nx} - \sum_{n=-1}^{N-1} A_n e^{-(n+1)x}, \text{ donc} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} &= A_N e^{-Nx} + \sum_{n=0}^{N-1} A_n (e^{-nx} - e^{-(n+1)x}) = A_N e^{-Nx} + (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-nx}. \end{aligned}$$

La suite $(A_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et $e^{-Nx} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $A_N e^{-Nx} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient la relation demandée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-nx}.$$

◇ On a vu en première question que $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$, donc

$$(1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - A) e^{-nx} = \left((1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^{+\infty} A_n e^{-nx} \right) - A = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) - A.$$

◇ Soit $\varepsilon > 0$.

$A_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} A$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $B = \left| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) - A \right| = (1 - e^{-x}) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (A_n - A) e^{-nx} \right|$.

Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$B \leq (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^N |A_n - A| e^{-nx} + (1 - e^{-x}) \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2} e^{-nx}.$$

Or $(1 - e^{-x}) \sum_{n=N+1}^{+\infty} (e^{-x})^n = (e^{-x})^{N+1} \leq 1$, donc $B \leq (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^N |A_n - A| e^{-nx} + \frac{\varepsilon}{2}$.

D'autre part, $(1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^N |A_n - A| e^{-nx} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \times \sum_{n=0}^N |A_n - A| = 0$, donc

il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in]0, \alpha[$, $\left| (1 - e^{-x}) \sum_{n=0}^N |A_n - A| e^{-nx} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors,

pour tout $x \in]0, \alpha[$, $B = \left| \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) - A \right| \leq \varepsilon$.

Ce qui est encadré prouve que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Problème 2 : Approximation uniforme d'une fonction périodique par des polynômes trigonométriques

Partie I : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

1°) Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors $\sin t \neq 0$, donc $f_n(t)$ est bien définie.

◇ $f_n(t) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{e^{int}}{e^{it}} \cdot \frac{1 - (e^{-2it})^n}{1 - e^{-2it}} = e^{i(n-1)t} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2ikt}$.

Ainsi, $f_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-2k-1)t}$.

◇ En passant à la partie réelle et en tenant compte du fait que par définition, $f_n(t) \in \mathbb{R}$,

on obtient $f_n(t) = \operatorname{Re}(f_n(t)) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((n-2k-1)t)$.

◇ Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $t \in](k-1)\pi, (k+1)\pi[\setminus \{k\pi\}$, par continuité de \cos ,

$f_n(t) = \sum_{h=0}^{n-1} \cos((n-2h-1)t) \xrightarrow[t \rightarrow k\pi]{t \in](k-1)\pi, (k+1)\pi[\setminus \{k\pi\}} \sum_{h=0}^{n-1} \cos((n-2h-1)k\pi)$, or pour

tout $h \in \{0, \dots, n-1\}$, $\cos((n-2h-1)k\pi) = (-1)^{(n-2h-1)k} = (-1)^{(n-1)k}$, donc $f_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow k\pi]{t \in](k-1)\pi, (k+1)\pi[\setminus \{k\pi\}} n(-1)^{(n-1)k}$.

Ceci démontre que f_n se prolonge par continuité en $k\pi$ en posant $f_n(k\pi) = n(-1)^{(n-1)k}$

2°) \diamond Supposons que n est impair. On pose alors $n = 2m + 1$.

Soit $k \in \{0, \dots, n - 1\}$.

Lorsque $k = m$, $n - 2k - 1 = 2m - 2k = 0$, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n - 2k - 1)t) dt = \frac{\pi}{2}$.

Lorsque $k \neq m$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((n - 2k - 1)t) dt = \left[\frac{\sin((2m - 2k)t)}{2m - 2k} \right]_0^{\pi/2} = 0$, car pour tout

$j \in \mathbb{Z}$, $\sin(j\pi) = 0$. Ainsi, $I_{2m+1} = \frac{\pi}{2}$.

\diamond Supposons que n est pair. On pose alors $n = 2m$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, $n - 2k - 1 \neq 0$, donc

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\sin((2(m-k)-1)t)}{2(m-k)-1} \right]_0^{\pi/2} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^{m-k+1}}{2(m-k)-1}.$$

Ainsi $I_{2m} = \sum_{k=-m+1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{(-1)^{h-1}}{-2h-1}$ (on a posé $h = -k$ dans la

seconde somme). Donc $I_{2m} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (en posant $k = h + 1$).

Enfinement $I_{2m} = 2 \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

3°) \diamond Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $A_n = \int_0^{\pi/2} \tan \frac{t}{2} \sin(2nt) dt$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} A_n &= \left[-\frac{\cos(2nt)}{2n} \tan \frac{t}{2} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{2n} (1 + (\tan \frac{t}{2})^2) \cdot \frac{1}{2} dt \\ &= -\frac{(-1)^n}{2n} + \frac{1}{2n} \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) (1 + (\tan \frac{t}{2})^2) \cdot \frac{1}{2} dt. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, puis par croissance de \tan sur $[0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi/2} \cos(2nt) (1 + (\tan \frac{t}{2})^2) \cdot \frac{1}{2} dt \right| &\leq \int_0^{\pi/2} |\cos(2nt)| \cdot |1 + (\tan \frac{t}{2})^2| \cdot \frac{1}{2} dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + 1) dt = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donc, à nouveau par inégalité triangulaire,

$$|A_n| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ Ainsi, d'après le principe des gendarmes, } A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

\diamond Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

$$f_{2n+1}(t) - f_{2n}(t) = \frac{\sin((2n+1)t) - \sin(2nt)}{\sin(t)} = \cos(2nt) + \sin(2nt) \frac{\cos(t) - 1}{\sin(t)},$$

or $\cos(t) - 1 = -2(\sin \frac{t}{2})^2$ et $\sin(t) = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$,

donc $f_{2n+1}(t) - f_{2n}(t) = \cos(2nt) - \tan \frac{t}{2} \sin(2nt)$.

Dans cette dernière égalité, toutes les quantités sont continues en 0, donc en faisant tendre t vers 0, cette égalité est encore vraie pour $t = 0$. Ainsi,

$$I_{2n+1} - I_{2n} = \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\pi/2} - A_n = A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

4°)

a) La suite $\left(\frac{1}{2n-1} \right)_{n \geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est spéciale alternée : elle converge d'après le théorème des séries alternées.

b) Posons $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$. D'après la seconde question, $v_n = \frac{1}{2}I_{2n}$, donc

$$v_n = \frac{1}{2}I_{2n+1} + \frac{1}{2}(I_{2n} - I_{2n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4}. \text{ Ainsi, } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}.$$

5°) \diamond Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(t) = \sin(t) - \frac{2t}{\pi}$.

$$f'(t) = \cos(t) - \frac{2}{\pi}, \text{ donc } f'(t) = 0 \iff t = \text{Acos}\left(\frac{2}{\pi}\right).$$

Ainsi, en posant $t_0 = \text{Acos}\left(\frac{2}{\pi}\right)$, f est croissante sur $[0, t_0]$ avec $f(0) = 0$, puis elle est décroissante sur $[t_0, \frac{\pi}{2}]$, avec $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ainsi, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0 : \sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$.

\diamond Ainsi, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2n}]$, $\sin(nt) \geq \frac{2nt}{\pi}$, donc $f_n^{2p}(t) \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} \frac{t^{2p}}{\sin^{2p}(t)}$, or $\sin t \leq t$ (se démontre en étudiant la fonction $t \mapsto t - \sin(t)$, de dérivée $1 - \cos(t) \geq 0$), donc pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2n}]$, $f_n^{2p}(t) \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p}$.

Pour $t = 0$, on a aussi $f_n^{2p}(0) = n^{2p} \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p}$,

$$\text{donc } J_{n,p} \geq \int_0^{\pi/(2n)} f_n^{2p}(t) dt \geq \frac{\pi}{2n} \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p} = \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p-1}.$$

6°) \diamond La première formule donnant $f_n(t)$ dans la première question ne fait intervenir que des applications continues sur \mathbb{R} en entier, donc en faisant tendre t vers $k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, elle est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Ainsi, si l'on fixe $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n^2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{n-1} e^{i(2n-2-2(h+k))t} = \sum_{\alpha=0}^{2n-2} \sum_{\substack{0 \leq h, k \leq n-1 \\ h+k=\alpha}} e^{i(2n-2-2\alpha)t}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Notons $A(\alpha) = \{(h, k) \in \{0, \dots, n-1\}^2 / h+k = \alpha\}$.

— Si $\alpha > 2n-2$, $A(\alpha) = \emptyset$.

— Supposons que $0 \leq \alpha \leq n-1$: soit $(h, k) \in A(\alpha)$. Alors $h \leq \alpha$, $k \leq \alpha$ et $h = \alpha - k$. La réciproque étant claire, $A(\alpha) = \{(\alpha - k, k) / 0 \leq k \leq \alpha\}$, donc $\text{Card}(A(\alpha)) = \alpha + 1$.

— Supposons que $n \leq \alpha \leq 2n-2$. Soit $(h, k) \in \{0, \dots, n-1\}^2$.

Alors $n-1-h$ et $n-1-k$ sont aussi dans $\{0, \dots, n-1\}$, donc
 $(h, k) \in A(\alpha) \iff (n-1-h) + (n-1-k) = 2n-2-\alpha$
 $\iff (n-1-h, n-1-k) \in A(2n-2-\alpha)$,
or $2n-2-\alpha \in \{0, \dots, n-2\}$, donc d'après le cas précédent,
 $\text{Card}(A(\alpha)) = \text{Card}(A(2n-2-\alpha)) = 2n-1-\alpha$.

Ainsi, $f_n^2(t) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (\alpha+1)e^{2it(n-1-\alpha)} + \sum_{\alpha=n}^{2n-2} (2n-1-\alpha)e^{2it(n-1-\alpha)}$.

On pose $k = n-1-\alpha$ dans chacune des deux sommes. On obtient

$$f_n^2(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)e^{2itk} + \sum_{k=-n+1}^{-1} (n+k)e^{2itk}$$

On a montré que $f_n^2(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)e^{2itk}$.

◇ f_n^2 étant à valeurs réelles, $J_{n,1} = \text{Re}(J_{n,1}) = \int_0^{\pi/2} \text{Re}(f_n^2(t))dt$,

donc $J_{n,1} = \sum_{\substack{k=-n+1 \\ k \neq 0}}^{n-1} (n-|k|) \left[\frac{\sin(2tk)}{2k} \right]_0^{\pi/2} + n\frac{\pi}{2}$, donc $J_{n,1} = n\frac{\pi}{2}$.

◇ $f_n^4(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \sum_{h=-n+1}^{n-1} (n-|k|)(n-|h|)e^{2it(k+h)}$,

donc $f_n^4(t) = \sum_{\alpha=-2n+2}^{2n-2} \left(\sum_{\substack{-n+1 \leq h, k \leq n-1 \\ h+k=\alpha}} (n-|k|)(n-|h|)e^{2it\alpha} \right)$, donc il existe une famille

$(\mu_\alpha)_{-2n+2 \leq \alpha \leq 2n-2}$ de réels telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n^4(t) = \sum_{\alpha=-2n+2}^{2n-2} \mu_\alpha e^{2it\alpha}$.

Un calcul similaire au précédent montre alors que $J_{n,2} = \mu_0 \frac{\pi}{2}$,

or $\mu_0 = \sum_{\substack{-n+1 \leq h, k \leq n-1 \\ h+k=0}} (n-|k|)(n-|h|) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)^2$, donc

$$\mu_0 = n^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = n^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2, \text{ puis d'après le cours, } \mu_0 = n^2 + 2 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},$$

donc $\mu_0 = n^2 + \frac{n}{3}(2n^2 - 3n + 1) = \frac{n}{3}(2n^2 + 1)$, puis $J_{n,2} = \frac{\pi}{6}n(2n^2 + 1)$.

Partie II : Module de continuité

7°) ◇ f' est définie et continue sur le compact $[0, 2\pi]$, donc f' est bornée sur $[0, 2\pi]$: il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f'(t)| \leq K$.

f est 2π -périodique : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t+2\pi) = f(t)$. En dérivant cette égalité, on

montre que f' est également 2π -périodique. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t - 2k\pi \in [0, 2\pi[$, donc $|f'(t)| = |f'(t - 2k\pi)| \leq K$.

◇ Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $Z \in A(\delta)$: il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| \leq \delta$ et $Z = |f(x) - f(y)|$.

f étant de classe C^1 , $Z = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f'(t)| dt \leq K|x - y| \leq K\delta$.

Ainsi, l'ensemble $A(\delta)$ est majoré, de plus il est non vide, donc d'après la propriété de la borne supérieure, $A(\delta)$ possède une borne supérieure, notée $\omega(\delta)$.

De plus on vient de montrer que $K\delta$ est un majorant de $A(\delta)$, donc par définition de la borne supérieure, $\omega(\delta) \leq K\delta$.

8°) Soit $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\delta \leq \delta'$. Alors $A(\delta) \subset A(\delta')$, donc d'après le cours, $\omega(\delta) \leq \omega(\delta')$, ce qui prouve que l'application ω est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

9°) ◇ Soit $Z \in A(n\delta)$: il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| \leq n\delta$ et $Z = |f(x) - f(y)|$. Quitte à permuter x et y , on peut supposer que $x \leq y$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, posons $x_i = x + i \frac{y - x}{n}$.

$Z = |f(x_0) - f(x_n)| = \left| \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$, or pour tout

$i \in \{1, \dots, n\}$, $|x_i - x_{i-1}| = \frac{|y - x|}{n} \leq \delta$, donc $|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \in A(\delta)$

et $|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq \omega(\delta)$. Ainsi, $Z \leq n\omega(\delta)$, pour tout $Z \in A(n\delta)$.

Par passage au sup, on en déduit que $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$: cette phrase signifie que, parce que $n\omega(\delta)$ est un majorant de $A(n\delta)$ et que $\omega(n\delta)$ en est le plus petit des majorants, on a $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.

◇ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n = \lfloor \lambda \rfloor$: $\lambda \leq n + 1$ et ω est croissante,

donc $\omega(\lambda\delta) \leq \omega((n + 1)\delta) \leq (n + 1)\omega(\delta)$. De plus $n \leq \lambda$, donc $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\omega(2t) = \omega(2nt \times \frac{1}{n}) \leq (2nt + 1)\omega(\frac{1}{n})$.

10°) $0 \leq \omega(\frac{1}{n}) \leq \frac{K}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\omega(\frac{1}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Partie III : Polynômes trigonométriques

11°) Lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, d'après question 2, $\frac{\sin(nt)}{\sin t} = f_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-2k-1)t}$, donc

par inégalité triangulaire, $\left| \frac{\sin(nt)}{\sin t} \right| \leq n$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $|\sin(nt)| \leq n|\sin t|$ et cette inégalité est évidente lorsque $t \in \pi\mathbb{Z}$.

12°) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a vu que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2n}]$, $|f_n(t)| \leq n$,

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t) dt \leq n^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t dt = n^{2p} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n} \right)^2$, puis $\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t) dt \leq \frac{\pi^2}{8} n^{2p-2}$.

Par ailleurs, pour tout $t \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, donc $|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2t}$.

Ainsi, $\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t) dt \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{1-2p} dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} \left[\frac{t^{2-2p}}{2-2p}\right]_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}$ (car $p \neq 1$). Donc

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t) dt &\leq \frac{1}{2-2p} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-2p} - \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2-2p}\right) \\ &= \frac{1}{2(p-1)} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 n^{2p-2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8(p-1)} (n^{2p-2} - 1). \text{ On en déduit que} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t) dt \\ &\leq \frac{\pi^2}{8} n^{2p-2} \times \frac{p-1}{p-1} + \frac{\pi^2}{8(p-1)} (n^{2p-2} - 1). \\ &= \frac{\pi^2}{8(p-1)} (pn^{2p-2} - 1). \end{aligned}$$

13°) D'après la question 5, $J_{n,p} > 0$, donc $U_{n,p}$ est correctement défini.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [-\pi, \pi]$. D'après la question 6,

$$f_n^2\left(\frac{t-x}{2}\right) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|) e^{i(t-x)k} = e^{i(t-x)(1-n)} \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|) \left(e^{i(t-x)}\right)^{k+n-1}.$$

Ainsi, $f_n^2\left(\frac{t-x}{2}\right) = e^{i(t-x)(1-n)} P\left(e^{i(t-x)}\right)$, où P est le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|) X^{k+n-1}, \text{ indépendant de } x \text{ et de } t.$$

Alors P^p est encore un polynôme que l'on écrit sous la forme $P^p(X) = \sum_{k=0}^M \alpha_k X^k$, les

α_k étant indépendants de x et de t .

Ainsi, $f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right) = e^{pi(t-x)(1-n)} \sum_{k=0}^M \alpha_k \left(e^{i(t-x)}\right)^k$. On en déduit que

$$\begin{aligned} U_{n,p}(x) &= \frac{1}{4J_{n,p}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=0}^M \alpha_k e^{i(t-x)[p(1-n)+k]} dt \\ &= \frac{1}{4J_{n,p}} \sum_{k=0}^M \alpha_k e^{ix[p(n-1)-k]} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{it[p(1-n)+k]} dt \\ &= \sum_{k=0}^M \beta_k e^{ix[p(n-1)-k]}, \end{aligned}$$

si l'on pose $\beta_k = \frac{1}{4J_{n,p}} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{it[p(1-n)+k]} dt$, qui est indépendant de x .

Alors $U_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^M \beta_k \left(\cos([p(n-1)-k]x) + i \sin([p(n-1)-k]x) \right)$, ce qui est bien

un polynôme trigonométrique car pour tout k , $p(n-1)-k \in \mathbb{Z}$.

14°) Fixons un réel x .

◇ En posant $u = x + 2t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x + 2t) f_n^{2p}(t) dt = \int_x^{x+\pi} f(u) f_n^{2p}\left(\frac{u-x}{2}\right) \frac{du}{2}$ et en posant $u = x - 2t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - 2t) f_n^{2p}(t) dt = - \int_x^{x-\pi} f(u) f_n^{2p}\left(-\frac{u-x}{2}\right) \frac{du}{2}$, or f_n est une application paire, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x - 2t) f_n^{2p}(t) dt = \int_{x-\pi}^x f(u) f_n^{2p}\left(\frac{u-x}{2}\right) \frac{du}{2}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t)) f_n^{2p}(t) dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right) \frac{dt}{2}$. L'application $t \mapsto |f_n(t)|$ est π -périodique, donc $t \mapsto f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right)$ est 2π -périodique, ainsi que l'application $t \mapsto f(t) f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right)$,

donc d'après le cours, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x + 2t) + f(x - 2t)) f_n^{2p}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right) \frac{dt}{2}$.

Ainsi, $U_{n,p}(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x + 2t) + f(x - 2t)) f_n^{2p}(t) dt$.

◇ Lorsque $f = 1$, cette égalité devient : $U_{n,p}(x) = \frac{1}{J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n^{2p}(t) dt = 1$.

Si l'on multiplie cette dernière égalité par $f(x)$,

on obtient que $f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2f(x)) f_n^{2p}(t) dt$,

donc $U_{n,p}(x) - f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)) f_n^{2p}(t) dt$.

15°) ◇ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, d'après la question 9, $|f(x + 2t) - f(x)| \leq \omega(2t)$, donc $|f(x + 2t) - f(x)| \leq (2nt + 1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$. De même, $|f(x - 2t) - f(x)| \leq (2nt + 1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$. Ces inégalités sont encore valables lorsque $t = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |U_{n,p}(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x + 2t) + f(x - 2t) - 2f(x)| f_n^{2p}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|f(x + 2t) - f(x)| + |f(x - 2t) - f(x)|) f_n^{2p}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2nt + 1)\omega\left(\frac{1}{n}\right) f_n^{2p}(t) dt \\ &\leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + 2n \frac{K_{n,p}}{J_{n,p}}\right) : (1). \end{aligned}$$

D'après les questions 5 et 12,

$$|U_{n,p}(x) - f(x)| \leq \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + 2n \frac{\pi^2}{8(p-1)} p n^{2p-2} \times \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{2p-1}\right) = \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{p}{p-1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p+1}\right).$$

Ainsi, il existe $M(p)$ tel que pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - U_{n,p}(x)| \leq M(p) \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

◇ Reprenons l'inégalité (1) lorsque $p = 2$ et utilisons la question 6 :

$$\begin{aligned}
|U_{n,p}(x) - f(x)| &\leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + 2n\left(\frac{\pi^2}{8}(2n^2)\right) \times \frac{6}{\pi n(2n^2 + 1)}\right) \\
&\leq \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + 2n\frac{\pi^2}{8} \times \frac{6}{\pi n}\right) \\
&= \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{3\pi}{2}\right) \leq 6\omega\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

car $1 + \frac{3\pi}{2} \leq 6 \iff \frac{3\pi}{2} \leq 5 \iff \pi \leq \frac{10}{3}$, ce qui est vrai. Ainsi, $M(2) = 6$ convient.

◇ Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega\left(\frac{1}{n}\right)$, donc par passage au sup,

$$0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \text{ or } M(p)\omega\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ d'après la question 10,}$$

donc par principe des gendarmes, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - U_{n,p}(x)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.