

Feuille d'exercices 17.

Calcul asymptotique

Exercice 17.1 : (niveau 1)

Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $e^{\sin t}$.

Exercice 17.2 : (niveau 1)

Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 17.3 : (niveau 1)

Donnez des équivalents de

- ◇ $\frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}$ au voisinage de -1 .
- ◇ $\frac{chx - \cos x}{(e^x - 1)^{\frac{5}{2}}}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
- ◇ $\frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 0 et de 1.

Exercice 17.4 : (niveau 1)

Nature de $\sum_{n \geq 1} a_n$, où $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}}$.

Exercice 17.5 : (niveau 1)

Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos(\sqrt{t+t^2})$: on attend des calculs précis et justifiés.

Exercice 17.6 : (niveau 1)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum a_n$ où $a_n = n^a \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$.

Exercice 17.7 : (niveau 1)

Calculer la limite en 0, si elle existe, de $(\sin x) \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $(1 + \tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$, $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$,
et $\frac{\sin(x \ln x)}{x}$.

Exercice 17.8 : (niveau 1)

Nature de la série de terme général $a_n = \cos\left(\frac{\pi n^2}{2n^2 + an + 1}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.9 : (niveau 1)

$DL_3(0)$ de $f(x) = xe^{\sin x} - \sqrt{1+x}$.

Exercice 17.10 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n})$.

Exercice 17.11 : (niveau 1)

Donner un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ et de $\ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$, .

Exercice 17.12 : (niveau 1)

Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.13 : (niveau 1)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 1 de $\frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

Exercice 17.14 : (niveau 1)

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 17.15 : (niveau 2)

Donnez des équivalents de

- ◇ $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ au voisinage de 0 et de 1.
- ◇ $f(x) = \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
- ◇ $f(x) = \frac{th3x - th2x}{x}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Exercice 17.16 : (niveau 2)

Donnez des équivalents au voisinage de $+\infty$ de

- ◇ $u_n = \left(\frac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n \ln(n)}$.
- ◇ $a_n = \arccos\left(\frac{2}{\pi} \arctan(n^2)\right)$.

Exercice 17.17 : (niveau 2)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(t) \sim t$, lorsque t tend vers 0.

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 17.18 : (niveau 2)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1°) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2°) Déterminer $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}_+^*$.

3°) Donner un équivalent de u_n .

Exercice 17.19 : (niveau 2)

Calculer la limite en $+\infty$, si elle existe, de $x \sin(\frac{1}{x})$, $\left(\frac{x^4}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} - x$, $\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x}$,
et $\frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2+2}}{e^x}$.

Exercice 17.20 : (niveau 2)

Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{nu_n}$
et déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17.21 : (niveau 2)

DL₁₀₀(0) de $f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\right)$.

Exercice 17.22 : (niveau 2)

DL₂(1) de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

Exercice 17.23 : (niveau 2)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^x + \arctan x - 1$.

Montrer que f^{-1} est définie au voisinage de 0 et déterminer son DL₂(0).

Exercice 17.24 : (niveau 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 17.25 : (niveau 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha}((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}).$$

Exercice 17.26 : (niveau 2)

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Exercice 17.27 : (niveau 3)

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ notée a_n .

2°) Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante.

3°) Montrer que la suite (a_n) converge vers une limite l que l'on calculera.

4°) Donner un équivalent de $a_n - l$.

Exercice 17.28 : (niveau 3)

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x_n) + nx_n = 0$.

2°) Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

3°) Donner un équivalent de x_n .

Exercices supplémentaires

Exercice 17.29 : (niveau 1)

Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\frac{1}{\cos t}$.

Exercice 17.30 : (niveau 1)

On fixe deux réels a et b . Déterminer la nature de la série $\sum u_n$

où $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + a \tan\left(\frac{1}{n}\right) + b \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Exercice 17.31 : (niveau 1)

Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\ln^2(1+t)$.

Exercice 17.32 : (niveau 1)

Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\ln(\cos t)$.

Exercice 17.33 : (niveau 1)

Nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 17.34 : (niveau 1)

Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\arcsin^2 t$.

Exercice 17.35 : (niveau 1)

Calculez la limite de $(x \cotan(x))^{\cotan(x)}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Exercice 17.36 : (niveau 1)

Calculer les limites à gauche et à droite en 0, si elles existent,

de $f(x) = x|1 + \frac{1}{x}|$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

Exercice 17.37 : (niveau 1)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln(k)}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 17.38 : (niveau 1)

Déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3}$.

Exercice 17.39 : (niveau 1)

1°) $f(x) = \frac{x \sin x}{x+3}$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

2°) $g(x) = (\sin x) \ln(1+x)$ possède-t-elle une limite en $+\infty$?

3°) $h(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ possède-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 17.40 : (niveau 1)

1°) Développement limité de $(\sin t)^{15}$ à l'ordre 17 au voisinage de 0.

2°) Développement limité de $e^{\cos t}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

Exercice 17.41 : (niveau 1)

Soient a, b et c trois réels. Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + an^2 + bn + c}$.

Exercice 17.42 : (niveau 1)

Donnez le développement limité de $(1 + \sin t)^{\frac{1}{t}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 17.43 : (niveau 2)

Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$.

Exercice 17.44 : (niveau 2)

Natures de $\sum_{n \geq 1} (\operatorname{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2}$, $\sum_{n \geq 1} \operatorname{argch}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $\sum \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - (\arctan n)^{\frac{3}{5}}\right)$.

Exercice 17.45 : (niveau 2)

Donnez un équivalent au voisinage de 0 de $\operatorname{sh}(\sin t) - \sin(\operatorname{sh} t)$.

Exercice 17.46 : (niveau 2)

Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.

Exercice 17.47 : (niveau 2)

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

Exercice 17.48 : (niveau 2)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer lorsqu'elle existe la limite l de (a_n) où :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \cos^n\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Etudier la nature de $\sum_{n \geq 1} (a_n - l)$.

Exercice 17.49 : (niveau 2)

Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = (1 + \sin x)^x$.

Exercice 17.50 : (niveau 2)

Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - \frac{1}{e} \right)$.

Exercice 17.51 : (niveau 2)

Donner un développement asymptotique en $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ de $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n k!$.

Exercice 17.52 : (niveau 2)

On pose $f(x) = xe^{(x^2)}$.

1°) Montrer que f est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre 6.

Exercice 17.53 : (niveau 2)

Soient $c \in \mathbb{R}_+^*$. On note
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \sin(x) - c \cos(x) \end{aligned}$$

1°) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que f possède un seul zéro x_n dans l'intervalle $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

2°) Déterminer un équivalent de $x_n - n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17.54 : (niveau 2)

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\frac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)} \right)^{n \ln(n)}$.

1°) Montrer que u_n tend vers une limite l lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum (u_n - l)$.

Exercice 17.55 : (niveau 2)

On note (u_n) la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$.

1°) Déterminer la limite de u_n .

2°) Donner un développement de u_n en $o(\frac{1}{n})$.

Exercice 17.56 : (niveau 2)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , où I est un intervalle ouvert contenant 0.

On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

1°) Montrer que f^{-1} est définie et de classe C^3 sur un intervalle ouvert contenant 0.

2°) Donner un développement limité de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

3°) On suppose maintenant que f est de classe C^n , où $n \in \mathbb{N}^*$, et qu'au voisinage de

0, $f(x) = \sum_{k=1}^n x^k + o(x^n)$.

Donner un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre n .

Exercice 17.57 : (niveau 2)

Déterminer une application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de $+\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln^n x = o(f(x))$ et $f(x) = o(x^{\frac{1}{n}})$.

Exercice 17.58 : (niveau 2)

Soit (a_n) une suite de réels positifs ou nuls.

Montrer que $\left[\frac{a_n}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right] \iff [e^{a_n} \sim (1 + \frac{a_n}{n})^n]$.

Exercice 17.59 : (niveau 3)

On pose $f(x) = \frac{e^{(x^2)} - 1}{x}$ lorsque $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

On admet que f réalise un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer un développement limité de f^{-1} au voisinage de 0 à l'ordre 6.

Exercice 17.60 : (niveau 3)

Soit (a_n) une suite de réels telle que $a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Déterminer la nature de $\sum a_n$.

Exercice 17.61 : (niveau 3)

Soit $f : x \mapsto \tan x - \frac{x^2}{x+1}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que f a un seul zéro noté x_n dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

Donner un développement de x_n lorsque n tend vers $+\infty$, à la précision $o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 17.62 : (niveau 3)

1°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}_+$

tel que $\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(1+x_n)$.

2°) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in [1, 2]$.

3°) Montrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite α .

4°) Donner un équivalent de $x_n - \alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17.63 : (niveau 3)

1°) On note U l'ensemble des suites réelles décroissantes (u_n) telles que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Montrez que les éléments de U sont tous équivalents.

2°) Même question avec l'ensemble V des suites réelles positives telles que $v_n + v_{2n} \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 17.64 : (niveau 3)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.

On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(g_n(x))$.

Montrer qu'il existe une application H de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(H(x))$ et $H(x) = o(g_n(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.