

DM 39 : un corrigé

Lorsque $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on convient de noter x_k sa k -ème composante.

Partie I : Premiers exemples.

1°) $\diamond$ Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $e^{in\theta} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{i\theta} e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $e^{i\theta} \ell = \ell$, or $e^{i\theta} \neq 1$, car $\theta \in]0, 2\pi[$. Ainsi, $\ell = 0$. Alors $1 = |e^{in\theta}| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |\ell| = 0$, donc $1 = 0$, ce qui est faux. Ainsi x est une suite divergente de complexes.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $[C(x)]_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$. $e^{i\theta} \neq 1$, donc $[C(x)]_n = \frac{1 - e^{i\theta(n+1)}}{(n+1)(1 - e^{i\theta})}$,

puis par inégalité triangulaire, $0 \leq |C(x)_n| \leq \frac{2}{(n+1)|1 - e^{i\theta}|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $C(x)$ converge vers 0.

2°) $x_{nk} = 1 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$ et $x_{nk+1} = 0 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc x possède deux valeurs d'adhérence distinctes. Ainsi, x est une suite divergente.

Posons $y = C(x)$. Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

$$\text{Alors } y_{kn+j} = \frac{1}{kn+j+1} \sum_{\substack{0 \leq h \leq kn+j \\ h \equiv 0 \pmod{n}}} 1 = \frac{k+1}{kn+j+1},$$

donc $y_{kn+j} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{kn} = \frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $j \in \{0, \dots, n-1\}$, $y_{kn+j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{n}$. Alors, d'après le cours, on peut affirmer que la suite $C(x)$ converge vers $\frac{1}{n}$.

Partie II : endomorphismes induits par C .

3°) Soit $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} [C(\lambda x + y)]_k &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (\lambda x + y)_j = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (\lambda x_j + y_j) \\ &= \lambda \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x_j + \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k y_j = \lambda C(x)_k + C(y)_k \\ &= (\lambda C(x) + C(y))_k, \end{aligned}$$

donc $C(\lambda x + y) = \lambda C(x) + C(y)$, ce qui prouve que C est une application linéaire de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

4°) $\diamond$ Soit $x, y \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Il existe $M, M' \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k| \leq M$ et $|y_k| \leq M'$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|[\lambda x + y]_k| \leq |\lambda| |x_k| + |y_k| \leq |\lambda| M + M'$, donc la suite $\lambda x + y$ est bornée. Ainsi, ℓ^∞ est stable par combinaisons linéaires. Il est clairement non vide, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

$\diamond$ Par restriction, C reste linéaire.

Soit $x \in \ell^\infty$. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k| \leq M$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $|C(x)_k| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k |x_j| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k M = M$, donc $C(x) \in \ell^\infty$.

Ceci prouve que $\begin{matrix} \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ x & \longmapsto & C(x) \end{matrix}$ est un endomorphisme.

5°) Soit $x, y \in \ell^\infty$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

— On a bien que $\|x\| \geq 0$.

— Supposons que $\|x\| = 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_k| \leq \|x\| = 0$, donc $x_k = 0$. Ainsi, $x = 0$.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \|x\| + \|y\|$, donc $\|x\| + \|y\|$ est un majorant de $\{|x_k + y_k| / k \in \mathbb{N}\}$. Or le sup est le plus petit des majorants, donc $\|x + y\| = \sup(\{|x_k + y_k| / k \in \mathbb{N}\}) \leq \|x\| + \|y\|$. Par la suite, on dira plus rapidement que l'on fait un passage au sup.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\lambda x_k| = |\lambda| |x_k| \leq |\lambda| \|x\|$, donc par passage au sup, $\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$. Si $\lambda \neq 0$, on peut appliquer l'inégalité précédente en remplaçant (λ, x) par $(\frac{1}{\lambda}, \lambda x)$, ce qui donne $\|x\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda x\|$, c'est-à-dire $\|\lambda x\| \geq |\lambda| \|x\|$, donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$. De plus, cette égalité est évidente lorsque $\lambda = 0$.

On a prouvé que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur ℓ^∞ .

6°) $\diamond$ Soit $x \in \ell^\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|[C(x)]_k| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \|x\| = \|x\|$, donc par

passage au sup, $\|C(x)\| \leq \|x\|$. Ceci prouve d'après le cours que l'application linéaire C est continue.

$\diamond$ Notons $\|C\| = \sup_{\substack{x \in \ell^\infty \\ \|x\| \leq 1}} \|C(x)\|$. Soit $x \in \ell^\infty$ tel que $\|x\| \leq 1$.

Alors $\|C(x)\| \leq \|x\| \leq 1$, donc par passage au sup, $\|C\| \leq 1$.

Notons $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. $\mathbf{1} \in \ell^\infty$ avec $\|\mathbf{1}\| = 1$ et on calcule que $C(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, donc $\|C\| = \sup_{\substack{x \in \ell^\infty \\ \|x\| \leq 1}} \|C(x)\| \geq \|C(\mathbf{1})\| = 1$.

On a ainsi montré par double inégalité que $\|C\| = 1$.

7°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$.

Soit $n \geq N_1$. $|A_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k| + \sum_{k=N_1}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^{N_1-1} |a_k| + \sum_{k=N_1}^n \frac{\varepsilon}{2} b_k$,

donc $|A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n b_k + D$ où $D = \sum_{k=0}^{N_1-1} (|a_k| - \frac{\varepsilon}{2} b_k)$ est une quantité indépendante de n .

Or $\sum b_n$ diverge et c'est une série de réels positifs, donc $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, il existe

N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $\frac{2D}{\varepsilon} \leq B_n$.

Ainsi, pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, $|A_n| \leq \varepsilon B_n$. On a prouvé que $A_n = o(B_n)$.

8°) $\diamond x_n - \ell = o(1)$ donc $p_n x_n - p_n \ell = o(p_n)$, or $\sum p_n$ est une série divergente de réels positifs, donc d'après la question précédente, $\sum_{j=0}^n (p_j x_j - p_j \ell) = o\left(\sum_{j=0}^n p_j\right)$, donc

$$\frac{\sum_{j=0}^n p_j x_j}{\sum_{j=0}^n p_j} - \ell = o(1), \text{ ce qu'il fallait démontrer.}$$

$\diamond$ Soit $x \in E$. Par définition de E , il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $p_n = 1$. Ainsi $\sum p_n$ est une série de réels strictement positifs qui diverge grossièrement, donc d'après le point précédent, $\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n x_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. En

particulier, ceci prouve que $C(x) \in E$. Par restriction, $x \mapsto C(x)$ reste linéaire sur E , donc C est un endomorphisme de E .

9°) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de vecteurs de ℓ^∞ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $x_{n,k}$ la k -ème composante de la suite x_n .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et $m \geq N$, $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon$.

Fixons $k \in \mathbb{N}$. Ce qui précède permet d'affirmer que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon,$$

donc que la suite $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, or $\mathbb{C}$ est complet d'après le cours, donc il existe $\ell_k \in \mathbb{C}$ tel que $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_k$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe à nouveau $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$ et $m \geq N$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - x_{m,k}| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq N$ et $k \in \mathbb{N}$ fixé, on fait tendre m vers $+\infty$. On obtient $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon$.

Posons $\ell = (\ell_k)_{k \in \mathbb{N}}$. L'inégalité précédente montre que $x_N - \ell$ est bornée, or $x_N \in \ell^\infty$ et on a montré que ℓ^∞ est un espace vectoriel, donc $\ell \in \ell^\infty$. De plus, on a vu que, avec $n \geq N$ fixé, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{n,k} - \ell_k| \leq \varepsilon$, donc par passage au sup, $\|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$. On a donc montré que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - \ell\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi toute suite de Cauchy de ℓ^∞ converge dans ℓ^∞ , ce qui conclut.

Partie III : valeurs d'adhérence

10°) $\diamond$ Supposons d'abord que a est une valeur d'adhérence de x . Il existe donc une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, strictement croissante, telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $|x_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$. Ainsi, $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\}$ contient $\varphi([M, +\infty[\cap \mathbb{N})$ qui est de cardinal infini car φ est strictement croissante donc injective. Cela prouve que $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - a| < \varepsilon\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal infini, donc c'est une partie non majorée. Ainsi si $N \in \mathbb{N}$, N ne majore pas cet ensemble, donc il existe $n > N$ tel que $|x_n - a| < \varepsilon$.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - a| < \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe $\varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, a) < 1$.

Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, a) < \frac{1}{2}$.

Pour $k \geq 1$, supposons construits $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(k)$ des entiers tels que

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k) \text{ et } \forall h \in \{0, \dots, k\} \quad d(x_{\varphi(h)}, a) < \frac{1}{h+1}.$$

Avec $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $N = \varphi(k) + 1$, il existe $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, a) < \frac{1}{k+2}$.

On construit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(x_{\varphi(n)}, a) < \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, donc a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) .

11°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $y_k - y_{k-1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k x_j - \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} x_j = \frac{x_k}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k-1} x_j$, donc

$$\text{par inégalité triangulaire, } |y_k - y_{k-1}| \leq \frac{\|x\|}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=0}^{k-1} \|x\| = \frac{2\|x\|}{k+1}.$$

12°) Posons à nouveau $C(x) = y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Ainsi, $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et d'après la question précédente, $y_n - y_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Notons I l'ensemble des valeurs d'adhérence de y et montrons que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une partie convexe de $\mathbb{R}$.

Soit $\alpha, \beta \in I$, avec $\alpha < \beta$. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Il s'agit donc de montrer que γ est une valeur d'adhérence de y .

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}$. $y_n - y_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, $|y_{n+1} - y_n| \leq \varepsilon$.

Posons $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \gamma - \alpha, \beta - \gamma) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question 10, il existe $p \geq \max(N, M)$ tel que $|y_p - \alpha| < \varepsilon'$ et il existe $q > p$ tel que $|y_q - \beta| < \varepsilon'$.

Posons $A = \{h \in [p, q] \cap \mathbb{N} \mid y_h \leq \gamma\}$. On a $y_p - \alpha < \varepsilon'$, donc $y_p - \alpha < \gamma - \alpha$ puis $y_p < \gamma$. Ainsi, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. On peut donc poser $k = \max(A)$.

On a $-y_q + \beta < \varepsilon' \leq \beta - \gamma$, donc $y_q > \gamma$ et $q \notin A$. Ainsi, $y_k \leq \gamma \leq y_{k+1}$.

Alors $k \geq p \geq N$ et $|y_k - \gamma| \leq |y_k - y_{k+1}| < \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{u_n}{n!} &= 1 + \frac{(n-1)!}{n!} + \sum_{h=1}^{n-2} \frac{h!}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{h=1}^{n-2} \frac{(n-2)!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + (n-2) \times \frac{1}{n(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \end{aligned}$$

donc d'après le principe des gendarmes, $\frac{u_n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $u_n \sim n!$.

Ensuite, $1 \leq \frac{v_n}{(2n-1)!} \leq \frac{u_{2n-1}}{(2n-1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc $v_n \sim (2n-1)!$.

14°) Notons $A = \{j \in \mathbb{N} / u_j \leq k\}$. $u_0 = 0 \leq k$, donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, si $j \in A \setminus \{0\}$, alors $k \geq u_j \geq j! \geq j$, donc A est majorée. On peut donc poser $J = \max(A)$. On a alors $u_J \leq k < u_{J+1}$, ce qui prouve l'existence de $j(k)$.

Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $u_j \leq k < u_{j+1}$. Alors $j \in A$, donc $j \leq \max(A) = J$. De plus, si $j < J$, alors $j+1 \leq J$, or la suite (u_n) est croissante, donc $k \geq u_J \geq u_{j+1}$, ce qui est faux. Ainsi, $j = J$, ce qui prouve l'unicité.

15°) $\diamond$ Par sommation par paquets, $y_{u_p-1} = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=u_j}^{u_{j+1}-1} x_k$,

$$\text{donc } y_{u_p-1} = \frac{1}{u_p} \sum_{\substack{0 \leq j \leq p-1 \\ j=0 \text{ [2]}}} \sum_{k=u_j}^{u_{j+1}-1} 1 = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \sum_{k=u_{2j}}^{u_{2j+1}-1} 1 = \frac{1}{u_p} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} (2j+1)!.$$

On a montré que $y_{u_p-1} = \frac{v_{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor}}{u_p}$.

$\diamond$ En particulier $y_{u_{2n-1}-1} = \frac{v_n}{u_{2n-1}} \sim \frac{(2n-1)!}{(2n-1)!} = 1$, donc $y_{u_{2n-1}-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, ce qui prouve que 1 est une valeur d'adhérence de y .

De même, $y_{u_{2n}-1} = \frac{v_n}{u_{2n}} \sim \frac{(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{2n}$, donc $y_{u_{2n}-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve que 0 est une valeur d'adhérence de y .

D'après la question 12, l'intervalle $[0, 1]$ est inclus dans l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$. De plus d'après le début de la question 6, les valeurs de la suite $C(x)$ sont comprises entre 0 et $\|x\| = 1$, or $[0, 1]$ est un fermé, donc toute suite extraite convergente de $C(x)$ converge dans $[0, 1]$. On a montré que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $C(x)$ est égal à $[0, 1]$.

De plus $x_{u_{j(2n)}} = 1$ et $x_{u_{j(2n+1)}} = 0$, donc 0 et 1 sont des valeurs d'adhérence de x . De plus x est à valeurs dans le fermé $\{0, 1\}$, donc de même que ci-dessus, on en déduit que l'ensemble des valeurs d'adhérence de x est égal à $\{0, 1\}$.

Partie IV : Convergence simple des itérés

16°) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n = \sum_{j=0}^n \beta^j a_{n-j} = \sum_{j=0}^n \beta^{n-j} a_j = \beta^n \left(\sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{\beta} \right)^j a_j \right)$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, posons $p_j = \left(\frac{1}{\beta} \right)^j$. D'après le cours, $\sum p_n$ est une série de réels strictement positifs qui diverge grossièrement, donc on peut utiliser la question 8. En posant $S_n = \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{\beta} \right)^j$, on a donc $M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, où $M_n = \frac{1}{S_n} \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{\beta} \right)^j a_j$.

Or $u_n = M_n \beta^n S_n$, mais $S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{\beta} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\beta}}$, donc $\beta^n S_n = \frac{\beta^n - \left(\frac{1}{\beta} \right)}{1 - \frac{1}{\beta}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{-\left(\frac{1}{\beta} \right)}{1 - \frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1 - \beta}$.

Ceci démontre que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1 - \beta}$.

17°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $v_n = \beta(\beta v_{n-2} + w_{n-2}) + w_{n-1}$, ce qui permet de conjecturer que $v_n = \beta^n v_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \beta^j w_{n-1-j}$. On démontre par récurrence que cette formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\beta \in]0, 1[$, donc $\beta^n v_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis d'après la question précédente, $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{1 - \beta}$.

18°) $\diamond$ Pour tout $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, il est clair que $[C(y)]_0 = y_0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n,0} = [C^n(x)]_0 = x_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$.

$\diamond$ De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1,1} = [C(x^{(n)})]_1 = \frac{1}{2}(x_{n,0} + x_{n,1}) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}x_{n,1}$. D'après la question précédente, avec $\beta = \frac{1}{2}$ et (w_n) égale à la suite constante $\frac{1}{2}x_0$, on en déduit que $x_{n,1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2}x_0}{1 - \frac{1}{2}} = x_0$.

$\diamond$ Soit maintenant $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}$.

Alors $x_{n+1,k+1} = \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^{k+1} x_{n,j} = \frac{1}{k+2} x_{n,k+1} + \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^k x_{n,j}$.

Posons $\beta = \frac{1}{k+2}$, $v_n = x_{n,k+1}$ et $w_n = \frac{1}{k+2} \sum_{j=0}^k x_{n,j}$. Alors $v_{n+1} = \beta v_n + w_n$.

Raisonnons par récurrence forte, en supposant que pour tout $j \in \{0, \dots, k\}$, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$.

Alors $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{k+1}{k+2} x_0$, donc d'après la question précédente,

$x_{n,k+1} = v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{k+1}{k+2} x_0}{1 - \frac{1}{k+2}} = x_0$, ce qu'il fallait démontrer.

Ceci prouve donc que la suite $(C^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une suite constante.

19°) x est une suite convergente, donc elle est bornée. Ainsi $x \in \ell^\infty$ et d'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n(x)$ est aussi un vecteur de ℓ^∞ . La question posée a

donc un sens.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$

tel que $C^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Avec les notations de la question précédente, cela signifie que

$\|C^n(x) - y\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_{n,k} - y_k| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ c'est-à-dire que la suite $(C^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

uniformément vers la suite y . Alors la suite $(C^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi simplement vers la suite y : en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_{n,k} - y_k| \leq \|C^n(x) - y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc

d'après le principe des gendarmes, pour k fixé, $x_{n,k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y_k$. Alors d'après la question

précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k = x_0 = 0$, donc y est la suite identiquement nulle et $C^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell$. On va en déduire que $\ell = 0$, ce qui constituera une

contradiction et achèvera la preuve.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|C^n(x)\| \leq \varepsilon$.

En particulier, $\|C^N(x)\| \leq \varepsilon$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_{N,k}| \leq \varepsilon$,

mais d'après la question 8, on montre par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$C^n(x)$ est une suite qui converge vers ℓ , donc $x_{N,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi, il existe $h \in \mathbb{N}$ tel

que $|x_{N,h} - \ell| \leq \varepsilon$. On en déduit que $|\ell| \leq |\ell - x_{N,h}| + |x_{N,h}| \leq 2\varepsilon$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, donc $\ell = 0$.