

## DM 40

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**

**Il n'est pas à rendre.**

**Un corrigé sera fourni le mercredi 4 mars 2026.**

- On note  $\mathcal{B}$  l'ensemble des suites bornées de complexes.
- On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des suites de complexes  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_{n+p} = c_n$ . On dit alors que  $p$  est une période de la suite  $(c_n)$ .

### Partie I :

- 1°) Montrer que  $\mathcal{P}$  est inclus dans  $\mathcal{B}$ .
- 2°) Montrer que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{P}$  sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.
- 3°) Pour tout  $c = (c_n) \in \mathcal{B}$ , on note  $\|c\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n|$ .

Montrer qu'on définit ainsi une norme sur  $\mathcal{B}$ .

- 4°) Fixons une suite  $c = (c_n)$  dans  $\mathcal{P}$ .

Montrer que  $c$  possède une plus petite période et décrire l'ensemble des périodes de  $c$  en fonction de cette plus petite période.

Déterminer cette plus petite période lorsque  $c_n = \operatorname{Re}(i^{n+1})$ .

- 5°) Montrer que  $\mathcal{P}$  n'est pas de dimension finie.

### Partie II :

- 6°) Soit  $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ . Soit  $p$  une période de  $c$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $M(c) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k}$ .

Montrer que  $M(c)$  ne dépend ni de  $p$ , ni de  $n$ .

Montrer que  $M$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{P}$ .

Pour toute la suite de ce problème, on posera  $\mathcal{P}_0 = \operatorname{Ker}(M)$ .

- 7°)

a) En munissant  $\mathcal{P}$  de la norme définie en question 3, montrer que  $M$  est continue.

b) Calculer  $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{|M(c)|}{\|c\|}$ .

c) Montrer que  $\mathcal{P}_0$  est un fermé de  $\mathcal{P}$ .

8°) Pour tout  $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ , on note  $D(c) = (c_{n+1} - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

a) Montrer que  $D$  est un endomorphisme de  $\mathcal{P}$ . Déterminer  $\text{Ker}(D)$  et  $\text{Im}(D)$ .

b) Montrer que  $D$  est continu et calculer  $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{\|D(c)\|}{\|c\|}$ .

9°) Pour tout  $c = (c_n) \in \mathcal{P}_0$ , on pose  $I(c) = \left( \sum_{k=0}^n c_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ .

a) Montrer que  $I$  est une application linéaire de  $\mathcal{P}_0$  dans  $\mathcal{P}$ .

b) Est-elle continue ?

c) Déterminer le noyau et l'image de  $I$ .

## Partie III :

Dans cette partie, on fixe  $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  et on étudie la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}.$$

10°) Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha \leq 0$ .

11°) Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha > 1$ .

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que  $\alpha \in ]0, 1]$ .

12°) Déterminer la nature de  $\sum_{n \geq 1} \frac{|c_n|}{n^\alpha}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ .

13°)

a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^\alpha} = \frac{S_n}{(n+1)^\alpha} - c_0 + \sum_{k=1}^n S_k \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ .

b) Lorsque  $c \in \mathcal{P}_0$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$  est convergente.

14°) Déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$  lorsque  $\alpha \in ]0, 1]$  et que  $c \notin \mathcal{P}_0$ .

## Partie IV :

D'après les questions précédentes, pour tout  $c = (c_n) \in \mathcal{P}_0$ , on peut poser

$$S(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n}.$$

**15°)** Montrer que  $S$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{P}_0$ .

**16°)** Calculer  $S(c)$  lorsque  $c = (\operatorname{Re}(i^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ . On pourra utiliser le fait que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ .

**17°)**

**a)** Montrer qu'il existe  $\gamma \in \mathbb{R}$  tel que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ .

**b)** Soit  $p \in \mathbb{N}$  avec  $p \geq 2$ . On suppose que  $c_n = 1$  lorsque  $n$  n'est pas congru à 0 modulo  $p$  et que  $c_n = 1 - p$  si  $n$  est congru à 0 modulo  $p$ . Calculer  $S(c)$ .

Pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $J_q = \int_0^1 \frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} dt$ .

**18°)** Montrer que  $J_q$  est correctement défini pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  et étudier la convergence de  $J_q$  lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$ .

**19°)** Fixons  $q \in \mathbb{N}^*$ . On note  $d = (d_n)$  l'unique suite de réels dont  $2q$  est une période et telle que  $d_n = 1$  pour tout  $n \in \{1, \dots, q\}$  et  $d_n = -1$  pour tout  $n \in \{q+1, \dots, 2q\}$ .

Montrer que  $\sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} J_q$ .

**20°)**  $S$  est-elle continue ?