

DM 40 : un corrigé

Partie I :

1°) Soit $(c_n) \in \mathcal{P}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$.

◇ Par récurrence sur k , montrons pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $c_{n+kp} = c_n$:

c'est évident pour $k = 0$

et si c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+(k+1)p} = c_{(n+kp)+p} = c_{n+kp} = c_n$.

◇ Alors $\{c_n / n \in \mathbb{N}\} = \{c_k / k \in \{0, \dots, p-1\}\}$: en effet, soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne, $n = pq + r$ avec $0 \leq r < p$. Ainsi, $c_n = c_r \in \{c_k / k \in \{0, \dots, p-1\}\}$. L'inclusion réciproque est évidente.

◇ Ainsi, $\{c_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie finie de $\mathbb{C}$, donc elle est bornée. On a montré que $(c_n) \in \mathcal{B}$, donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$.

2°)

◇ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ contiennent la suite identiquement nulle, donc ils sont non vides.

◇ Soit $(c_n), (d_n) \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par hypothèse, il existe $M, M' \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leq M$ et $|d_n| \leq M'$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha c_n + d_n| \leq |\alpha|M + M'$, donc la suite $\alpha(c_n) + (d_n)$ est encore dans $\mathcal{B}$.

◇ Soit $(c_n), (d_n) \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par hypothèse, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$ et $d_{n+q} = d_n$. On a vu en question précédente qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+pq} = c_n$ et $d_{n+pq} = d_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha c_{n+pq} + d_{n+pq} = \alpha c_n + d_n$, ce qui prouve que la suite $\alpha(c_n) + (d_n)$ est encore dans $\mathcal{P}$, et que pq en est une période.

◇ On a ainsi prouvé que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ sont non vides et stables par combinaisons linéaires, donc ce sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (lequel est bien un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel d'après le cours).

3°) Soit $c = (c_n) \in \mathcal{B}$, $d = (d_n) \in \mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

◇ Clairement $\|c\| \geq 0$.

◇ Supposons que $\|c\| = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |c_n| \leq \|c\| = 0$, donc $c_n = 0$, puis $c = 0$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda c_n| = |\lambda| |c_n| \leq |\lambda| \|c\|$, donc $|\lambda| \|c\|$ est un majorant de $\{|\lambda c_n| / n \in \mathbb{N}\}$, or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc $\|\lambda c\| = \sup\{|\lambda c_n| / n \in \mathbb{N}\} \leq |\lambda| \|c\|$. Par la suite, ce raisonnement sera appelé un passage à la borne supérieure.

◇ Supposons que $|\lambda| \neq 0$. Alors en appliquant le résultat précédent, mais en remplaçant (λ, c) par $(\frac{1}{\lambda}, \lambda c)$, on obtient que $\|c\| \leq |\frac{1}{\lambda}| \|\lambda c\|$, donc $\|\lambda c\| = |\lambda| \|c\|$. Ce résultat est évident lorsque $\lambda = 0$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. $|c_n + d_n| \leq |c_n| + |d_n| \leq \|c\| + \|d\|$, donc par passage à la borne supérieure, $\|c + d\| \leq \|c\| + \|d\|$.

◇ En conclusion, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathcal{B}$.

4°) ◇ Notons G l'ensemble des périodes de c . Par hypothèse, G est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un minimum, noté $p_c \in \mathbb{N}^*$.

◇ On a déjà vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kp_c est encore une période de c , donc $p_c \mathbb{N}^* \subset G$. Réciproquement, soit $p \in G$.

Par division euclidienne, il existe $q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p = qp_c + r$ avec $0 \leq r < p_c$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{r+n} = c_{p-qp_c+n} = c_n$, donc si $r \neq 0$, alors $r \in G$, ce qui contredit la minimalité de p_c . Ainsi, $r = 0$ et $p = qp_c$, avec $q \in \mathbb{N}^*$.

En conclusion, l'ensemble des périodes de c est $p_c \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire l'ensemble des multiples de la plus petite période.

◇ Supposons que $c_n = \operatorname{Re}(i^{n+1})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+4} = c_n$, car $i^4 = 1$, donc 4 est une période de c .

On calcule $c_0 = 0$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 1$, donc $c_0 \neq c_{0+1}$, $c_1 \neq c_{1+2}$ et $c_0 \neq c_{0+3}$. Ainsi, 1, 2 et 3 ne sont pas des périodes de c . Ceci prouve que 4 est la plus petite période de c .

5°) Supposons que $\mathcal{P}$ est de dimension finie. Ainsi, il existe $h \in \mathbb{N}$ et $(b_1, \dots, b_h) \in \mathcal{P}^h$ qui vérifient :

pour tout $c \in \mathcal{P}$, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_h) \in \mathbb{C}^h$ tel que $c = \sum_{i=1}^h \alpha_i b_i$.

On a vu en question 2 que si p est une période de $c \in \mathcal{P}$ et si q est une période de $d \in \mathcal{P}$, alors pq est une période de $\alpha c + \beta d$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que, si $c_1, \dots, c_k$ sont k éléments de $\mathcal{P}$, alors pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$,

$\sum_{i=1}^k \alpha_i c_i$ admet $\prod_{i=1}^k p_i$ comme période.

Ainsi, d'après notre hypothèse, en notant q_1 une période de b_1 , ..., q_h une période de

b_h , pour tout $c \in \mathcal{P}$, $Q = \prod_{i=1}^h q_i \in \mathbb{N}^*$ est une période de c .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$ lorsque $n \not\equiv 0 [Q+1]$ et $u_n = 1$ lorsque $n \equiv 0 [Q+1]$. La suite $u = (u_n)$ est périodique de période $Q+1$, donc $u \in \mathcal{P}$. Alors ce qui précède implique que Q est aussi une période de u . D'après la question 4, $(Q+1) - Q = 1$ est aussi une période de u , donc u est constante, ce qui est faux.

En conclusion, $\mathcal{P}$ est bien de dimension infinie.

Partie II :

6°) Notons, pour toute période p de c et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c, p, n) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k}$.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. $pM(c, p, n+1) = \sum_{k=0}^{p-2} c_{(n+1)+k} + c_{(n+1)+(p-1)} = \sum_{h=1}^{p-1} c_{n+h} + c_n$ (en posant

$h = k+1$ et car c est p -périodique), donc $pM(c, p, n+1) = \sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k} = pM(c, p, n)$.

Ainsi la suite $(M(c, p, n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c, p, n) = M(c, p, 0)$.

◇ Notons p_0 la période minimale de c et soit p une période de c .

D'après la question 4, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = kp_0$. Alors, par sommation par

paquets, $M(c, p, 0) = \frac{1}{kp_0} \sum_{h=0}^{kp_0-1} c_h = \frac{1}{kp_0} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{h=\alpha p_0}^{(\alpha+1)p_0-1} c_h = \frac{1}{kp_0} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{h=0}^{p_0-1} c_{h+\alpha p_0}$. Ainsi,

$$M(c, p, 0) = \frac{1}{k} \sum_{\alpha=0}^{k-1} M(c, p_0, \alpha p_0) = \frac{1}{k} k M(c, p_0, 0), \text{ d'après le point précédent.}$$

On en déduit que $M(c, p, 0) = M(c, p_0, 0)$.

◇ En conclusion, pour toute période p de c et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c, p, n) = M(c, p_0, 0)$: $M(c, p, n)$ ne dépend ni de p , ni de n , on peut effectivement le noter $M(c)$.

◇ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$, $d = (d_n) \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons p une période de c et q une période de d . On sait alors que pq est une période de $\alpha c + d$. Ainsi,

$$M(\alpha c + d) = M(\alpha c + d, pq, 0) = \frac{1}{pq} \sum_{k=0}^{pq-1} (\alpha c_k + d_k) = \alpha M(c, pq, 0) + M(d, pq, 0), \text{ car}$$

pq est une période de c et de d . Ainsi, $M(\alpha c + d) = \alpha M(c) + M(d)$. De plus M est à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, donc M est bien une forme linéaire sur $\mathcal{P}$.

7°)

a) Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ et p une période de c .

$|M(c)| = \frac{1}{p} \left| \sum_{k=0}^{p-1} c_k \right| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} |c_k| \leq \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \|c\| = \|c\|$. Or M est linéaire, donc d'après le cours, M est continue (elle est même lipschitzienne).

b) Ce qui précède montre que, pour tout $c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, $\frac{|M(c)|}{\|c\|} \leq 1$, donc 1 est

un majorant de $\left\{ \frac{|M(c)|}{\|c\|} / c \in \mathcal{P} \setminus \{0\} \right\}$. Ainsi, par passage à la borne supérieure,

$$\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{|M(c)|}{\|c\|} \leq 1.$$

Notons $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$, de période 1,

donc $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{|M(c)|}{\|c\|} \geq \frac{|M(\mathbf{1})|}{\|\mathbf{1}\|} = 1$. En conclusion, $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{|M(c)|}{\|c\|} = 1$.

c) $\mathcal{P}_0 = \text{Ker}(M) = M^{-1}(\{0\})$, or M est continue et $\{0\}$, en tant que singleton, est un fermé de $\mathbb{C}$, donc d'après le cours, $\mathcal{P}_0$ est un fermé de $\mathcal{P}$.

8°)

a)

◇ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. Soit p une période de c . Posons $D(c) = d = (d_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+p} = c_{n+1+p} - c_{n+p} = d_n$, donc $d \in \mathcal{P}$.

De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $c, d \in \mathcal{P}$, on vérifie aisément que $D(\alpha c + d) = \alpha D(c) + D(d)$, donc D est bien un endomorphisme sur $\mathcal{P}$.

◇ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. $c \in \text{Ker}(D) \iff \forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} - c_n = 0$, donc $\text{Ker}(D)$ est l'ensemble des suites constantes de complexes.

◇ Soit $d = (d_n) \in \text{Im}(D)$:

il existe $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$.

Soit p une période de c . On a vu que p est aussi une période de d ,

donc $M(d) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} (c_{k+1} - c_k) = M(c, p, 1) - M(c, p, 0) = 0$ d'après la question 6.

Ceci prouve que $\text{Im}(D) \subset \mathcal{P}_0$.

Réciproquement, soit $d = (d_n) \in \mathcal{P}_0$. On définit la suite de complexes $c = (c_n)$ par les relations : $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = d_n + c_n$.

Soit p une période de d . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k que

$c_{n+k} = c_n + \sum_{h=0}^{k-1} d_{n+h}$, donc en particulier, $c_{n+p} = c_n + pM(d) = c_n$ car $d \in \mathcal{P}_0 = \text{Ker}(M)$.

Ainsi $c \in \mathcal{P}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$, donc $d = D(c) \in \text{Im}(D)$.

On a donc prouvé que $\text{Im}(D) = \mathcal{P}_0$.

b)

◇ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_{n+1} - c_n| \leq |c_{n+1}| + |c_n| \leq 2\|c\|$, donc par passage à la borne supérieure, $\|D(c)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_{n+1} - c_n| \leq 2\|c\|$. Or D est linéaire, donc

D est continue.

◇ Ainsi, pour tout $c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, $\frac{\|D(c)\|}{\|c\|} \leq 2$,

donc par passage au sup, $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{\|D(c)\|}{\|c\|} \leq 2$.

Posons $c_0 = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. c_0 est 2-périodique, $\|c_0\| = 1$

et $D(c_0) = ((-1)^{n+1} - (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = -2c_0$, donc $\|D(c_0)\| = 2$.

Alors $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{\|D(c)\|}{\|c\|} \geq \frac{\|D(c_0)\|}{\|c_0\|} = 2$. En conclusion, $\sup_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \frac{\|D(c)\|}{\|c\|} = 2$.

9°)

a) Soit $c \in \mathcal{P}_0$. Notons p une période de c . Posons $d = (d_n) = I(c)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+p} = d_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k = d_n + pM(c, p, n+1) = d_n$, car $c \in \mathcal{P}_0 = \text{Ker}(M)$.

Ainsi $I(c) \in \mathcal{P}$.

De plus, on vérifie aisément que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $c, d \in \mathcal{P}_0$, $I(\alpha c + d) = \alpha I(c) + I(d)$, donc I est bien une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

b) Supposons que I est continue. I étant linéaire, d'après le cours, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $c \in \mathcal{P}_0$, $\|I(c)\| \leq k\|c\|$.

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = e^{\frac{i\pi n}{p}}$.

c est $2p$ -périodique, donc $c \in \mathcal{P}$. De plus, $M(c) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{2p-1} \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^{2p}}{1 - e^{\frac{i\pi}{p}}}$, car $e^{\frac{i\pi}{p}} \neq 1$. Ainsi, $M(c) = 0$ et $c \in \mathcal{P}_0$.

$$\|I(c)\| \geq \left| \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^k \right| = \left| \frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{i\pi}{p}}} \right| = \frac{2}{|e^{\frac{i\pi}{2p}}(-2i \sin(\frac{\pi}{2p}))|}, \text{ donc } \|I(c)\| \geq \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2p})}.$$

On en déduit que $k = k\|c\| \geq \|I(c)\| \geq \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2p})} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2p}} = \frac{2p}{\pi} \underset{p \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$. C'est impossible, donc I n'est pas continue.

c) $\diamond$ Soit $c \in \text{Ker}(I)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k = 0$. Par récurrence sur n , on en déduit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, donc $\text{Ker}(I) = \{0\}$.

$\diamond$ Supposons que $c \in \text{Im}(I)$: il existe $d \in \mathcal{P}_0$ tel que $c = I(d)$.

Notons p une période de d : c'est aussi une période de c d'après la question a) et

$$c_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} d_k = pM(d, p, 0) = 0 \text{ car } d \in \mathcal{P}_0.$$

$\diamond$ Réciproquement, soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ tel que $c_{p-1} = 0$, où p désigne une période de c . Montrons que $c \in \text{Im}(I)$.

Posons $d_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = c_{n-1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+p} = c_{n-1+p} = c_{n-1} = d_n$ et $d_p = c_{p-1} = 0 = d_0$, donc $d \in \mathcal{P}$ et p est une période de d .

$$\text{Alors } e = D(d) \in \text{Im}(D) = \mathcal{P}_0 \text{ et } I(e) = \left(\sum_{k=0}^n (d_{k+1} - d_k) \right)_{n \in \mathbb{N}} = (d_{n+1} - d_0) = c.$$

Ainsi, $c \in \text{Im}(I)$.

$\diamond$ On a donc montré que $c \in \text{Im}(I)$ si et seulement si il existe une période p de c telle que $c_{p-1} = 0$. Soit c une telle suite. Notons p_c la plus petite période de c . On a vu qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = kp_c$. Alors $0 = c_{kp_c-1} = c_{p_c-1}$.

Ainsi, en notant p_c la plus petite période de c , pour tout $c \in \mathcal{P}$, on a montré que $\text{Im}(I) = \{c = (c_n) \in \mathcal{P} / c_{p_c-1} = 0\}$.

Partie III :

10°) Si $c = 0$, la série est identiquement nulle, donc elle converge.

Supposons maintenant que $c \neq 0$. Notons p une période de c . Il existe $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $c_r \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{c_{kp+r}}{(kp+r)^\alpha} = \frac{c_r}{(kp+r)^\alpha} \not\rightarrow_{k \rightarrow +\infty} 0$, car $\alpha \leq 0$.

A fortiori, $\frac{c_n}{n^\alpha} \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ (sinon toutes ses suites extraites convergeraient vers 0), donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

11°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{c_n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{\|c\|}{n^\alpha}$, or $\alpha > 1$, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Ainsi,

$\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

12°) Si $c = 0$, la série est identiquement nulle, donc elle converge.

Supposons maintenant que $c \neq 0$. Notons p une période de c . Il existe $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $c_r \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{|c_{kp+r}|}{(kp+r)^\alpha} = \frac{|c_r|}{(kp+r)^\alpha}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=p}^{kp-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} = \sum_{h=1}^{k-1} \sum_{n=ph}^{ph+p-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} \geq \sum_{h=1}^{k-1} \frac{|c_{ph+r}|}{(ph+r)^\alpha} = |c_r| \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{(ph+r)^\alpha},$$

mais $\frac{1}{(ph+r)^\alpha} \underset{h \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^\alpha} \times \frac{1}{h^\alpha}$ et $\alpha \leq 1$, donc la série $\sum_h \frac{1}{(ph+r)^\alpha}$ diverge, or elle

est à termes positifs, donc $\sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{(ph+r)^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Alors, d'après le principe des gen-

darmes, $\sum_{n=p}^{kp-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$. Ceci prouve que la série tronquée $\sum_{n \geq p} \frac{|c_n|}{n^\alpha}$ est divergente.

Il en est de même d'après le cours pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|c_n|}{n^\alpha}$.

13°)

a) Il s'agit d'une transformation d'Abel :

$$\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^\alpha},$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^n S_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{S_n}{(n+1)^\alpha} - c_0.$$

b) Avec les notations de la partie II, $(S_n) = I(c) \in \mathcal{P}$, donc la suite (S_n) est bornée.

On en déduit déjà que $\frac{S_n}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, car $\alpha > 0$.

De plus, $\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{k})^\alpha}\right) = \frac{1}{k^\alpha} (1 - (1 - \frac{\alpha}{k} + O(\frac{1}{k^2})))$, donc $\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \frac{\alpha}{k^{\alpha+1}} + O(\frac{1}{k^{\alpha+2}})$.

On a vu que $S_n = O(1)$, donc $S_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$ mais $\alpha + 1 > 1$, donc

$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge (et ses termes sont positifs), donc d'après le cours,

$\sum_{k \geq 1} S_k \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$ est absolument convergente. Alors, d'après la formule établie

au a), la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{k^\alpha}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$.

14°) Posons $d_n = c_n - M(c)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite constante est dans $\mathcal{P}$ qui est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, donc $d = (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}$. De plus, par linéarité de M , $M(d) = M(c) - M(c) \times M((1)_{n \in \mathbb{N}}) = M(c) - M(c) = 0$, donc $d \in \mathcal{P}_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{c_n}{n^\alpha} = \frac{d_n}{n^\alpha} + M(c) \frac{1}{n^\alpha}$, or d'après la question précédente, $\sum_{n \geq 1} \frac{d_n}{n^\alpha}$ est convergente, et par hypothèse, $M(c) \neq 0$, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ a même nature que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$: elle est divergente.

Partie IV :

15°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $c, d \in \mathcal{P}_0$. D'après le cours sur les séries convergentes,

$S(\alpha c + d) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha c_n + d_n}{n} = \alpha S(c) + S(d)$. De plus S est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc S est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_0$.

16°) On a vu en question 4 que c est 4-périodique avec $(c_0, c_1, c_2, c_3) = (0, -1, 0, 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{2n} = 0$ et $c_{2n+1} = (-1)^{n+1}$. Ainsi,

$$S(c) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{c_n}{n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{c_{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \int_0^1 t^{2k} dt = - \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^2)^k dt,$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = - \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt = [-\arctan t]_0^1 + \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt.$$

Or par inégalité triangulaire, $\left| \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En conclusion, $S(C) = -\frac{\pi}{4}$.

17°) a) Posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Alors $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$. Ainsi, $\sum (u_n - u_{n-1})$ est une série télescopique convergente, donc d'après le cours, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On vérifie que c est une suite p-périodique et que $M(c) = 0$, donc $c \in \mathcal{P}_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=hp+1}^{hp+p} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=1}^p \frac{c_k}{k+hp}$, donc

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k+hp} + \frac{1-p}{p+hp} \right) = \sum_{h=0}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{k+hp} - \frac{p}{p+hp} \right) = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{k} - \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{h+1}.$$

Alors d'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \ln(np) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma + o(1) = \ln p + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln p.$$

En conclusion, $S(c) = \ln p$.

18°)

◇ Pour tout $t \in]0, 1]$, $\frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} = \frac{\sum_{k=0}^{q-1} t^k}{1+t^q}$, donc cette fonction de t se prolonge continûment sur $[0, 1]$ et I_q est bien définie en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

$$\diamond \text{ De plus } J_q = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{q-1} t^k}{1+t^q} dt \geq \sum_{k=0}^{q-1} \int_0^1 \frac{t^k}{2} dt = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \frac{1}{k} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'après le principe des gendarmes, $J_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty$.

19°) La suite d est bien $2q$ -périodique avec $M(d) = 0$, donc $d \in \mathcal{P}_0$. On sait ainsi que $\sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n}$ converge vers $S(d)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n} &= \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{n=2qh+1}^{2q(h+1)} \frac{d_n}{n} = \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{n=1}^{2q} \frac{d_n}{n+2qh} \\
&= \sum_{h=0}^{N-1} \left(\sum_{n=1}^q \frac{1}{n+2qh} - \sum_{n=q+1}^{2q} \frac{1}{n+2qh} \right) = \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{n=1}^q \left(\frac{1}{n+2qh} - \frac{1}{n+q+2qh} \right) \\
&= \sum_{h=0}^{N-1} \sum_{n=1}^q \left(\frac{(-1)^{2h}}{n+2qh} + \frac{(-1)^{2h+1}}{n+q(2h+1)} \right) = \sum_{n=1}^q \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{(-1)^i}{n+qi} \\
&= \sum_{n=1}^q \sum_{i=0}^{2N-1} (-1)^i \int_0^1 t^{n+qi-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=1}^q t^{n-1} \sum_{i=0}^{2N-1} (-t^q)^i dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{q-1} t^n \frac{1 - (-t^q)^{2N}}{1 + t^q} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^q}{(1-t)(1+t^q)} (1 - t^{2Nq}) dt, \text{ or} \\
\left| \int_0^1 \frac{1 - t^q}{(1-t)(1+t^q)} t^{2Nq} dt \right| &\leq \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{q-1} t^k}{1 + t^q} t^{2Nq} dt \leq q \int_0^1 t^{2Nq} dt = \frac{q}{2Nq+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \\
\text{donc } \sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n} &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} J_q.
\end{aligned}$$

En conclusion, $S(d) = J_q$.

20°) Supposons que S est continue. S étant linéaire, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $c \in \mathcal{P}_0$, $|S(c)| \leq k\|c\|$.

En particulier, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la suite d précédente, on obtient que $k = k\|d\| \geq |S(d)| = J_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} +\infty$. C'est impossible, donc S n'est pas continue.