

DM 41 : un corrigé

Ce problème s'inspire très largement de la première moitié du sujet de Centrale MP 2011.

Partie I : Formule de Taylor

1°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ la propriété suivante :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Pour $n = 0$, f étant de classe C^1 sur $[a, b]$, d'après le cours, $f(a) = f(b) + \int_a^b f'(t) dt$, ce qui prouve $R(0)$.

Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence,

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \text{ ce}$$

qui prouve $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

◇ Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à $f(t) = e^{-t}$ entre $a = x$ et

$b = 0$. On obtient que $f(0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (0-x)^k + \int_x^0 \frac{(0-t)^n}{n!} (-1)^{n+1} e^{-t} dt$, donc

$$1 = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} + \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t} dt. \text{ On en déduit que } \int_0^x t^n e^{-t} dt = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x} \right).$$

◇ En conservant l'entier n fixé, on fait maintenant tendre x vers $+\infty$. D'après le théorème des croissances comparées, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $x^k e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc

$$\int_0^x t^n e^{-t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} n!.$$

Cela signifie que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est définie et que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

3°) On applique la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $k+1$:

$$f(k+1) = f(k) + \sum_{h=1}^n \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = x+k$, on obtient que

$$f(k+1) = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(x+k)(1-x)^n dx.$$

Partie II : Convergence des séries de Riemann

4°) Pour tout $x \in [k-1, k] \subset [a, +\infty[$, $f(x+1) \leq f(k) \leq f(x)$ par décroissance de f donc $\int_{k-1}^k f(x+1) dx \leq \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$, soit, en effectuant le changement

de variable $t = x+1$ dans la première intégrale, $\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$.

5°) Si $\alpha > 1$, on a donc, en appliquant ce qui précède à $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui est bien continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = 1 + \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^n = 1 + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles

est majorée : elle est donc convergente.

Si $\alpha \leq 1$, on a donc, en appliquant la question 4 à $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ qui est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

6°) La majoration a été vue lors de la question précédente et la minoration est immédiate car $\frac{1}{1^\alpha} = 1$, donc $\forall \alpha > 1, 1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

Partie III : Première étude asymptotique du reste

7°) Soit $n, N \in \mathbb{N}^*$ avec $2 \leq n \leq N$. D'après la question 4,

$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^N \frac{dt}{t^\alpha}$, or $\int_n^N \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} \right]_n^N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &\leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}, \text{ puis} \\ 0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &\leq \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right). \text{ Or} \\ \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{\alpha-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^{\alpha-1}} \left(1 + (\alpha-1)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) \sim \frac{\alpha-1}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, ce qui démontre que

$$0 \leq R_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \text{ donc que } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

8°) D'après la question 3, avec $n = 2$,

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) + \frac{1}{2}f''(k) + \frac{1}{2} \int_0^1 f^{(3)}(k+x)(1-x)^2 dx.$$

Or $\forall t \in \mathbb{R}_+, f'(t) = \frac{1}{t^\alpha}, f''(t) = -\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}, f^{(3)}(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On a donc

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(k+t)^{\alpha+2}} dt = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$$

$$\text{avec } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_0^1 \frac{1}{k^{\alpha+2}} dt.$$

$$\text{On a donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k \text{ avec } 0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \frac{1}{k^{\alpha+2}}.$$

9°) On peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme

$$\frac{1}{k^\alpha} = f(k+1) - f(k) + \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} - A_k \text{ avec } A_k = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right).$$

La série $\sum_{k \geq 1} (f(k+1) - f(k))$ est une série télescopique qui converge puisque $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

et les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}$ sont des séries de Riemann convergentes. On a donc,

$$\text{par linéarité de la somme, } R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{\alpha}{2} R_n(\alpha+1) - \sum_{k=n}^{+\infty} A_k. \text{ Or, par sommation}$$

de relation de comparaison pour des séries convergentes, on a $\sum_{k=n}^{+\infty} A_k = O(R_n(\alpha + 2))$.

D'autre part d'après la question 7 appliquée à $\alpha + 1$ et $\alpha + 2$,

$$R_n(\alpha + 1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \text{ et } R_n(\alpha + 2) = \frac{1}{(\alpha + 1)n^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

$$\text{Finalement, } R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - 1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Partie IV : Nombres de Bernoulli

10°) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

◇ Pour $p = 1$, posons $g = f$. Alors $g' = f'$, donc $g' = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, car la dernière somme est vide. Ceci démontre qu'en choisissant $\boxed{a_0 = 1}$, la propriété $R(1)$ est vérifiée.

◇ Pour $p = 2$, soit a_1 un réel pour le moment quelconque. Posons $g = f + a_1 f'$. Alors $g' + \frac{1}{2} g'' = f' + a_1 f'' + \frac{1}{2}(f'' + a_1 f^{(3)})$. Ainsi, en posant $\boxed{a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } b_{1,2} = -\frac{1}{4}}$,

$g' + \frac{1}{2} g'' = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, de sorte que la propriété $R(2)$ est vérifiée : en effet, a_1 et $b_{1,2}$ ne dépendent pas de f .

11°) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

Prenons a_p pour le moment quelconque et notons $g = \sum_{k=0}^p a_k f^{(k)}$.

Posons $h = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$, de sorte que $g = h + a_p f^{(p)}$.

D'après $R(p)$, $\sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} h^{(j)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)}$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} h^{(j)} + \frac{1}{(p+1)!} h^{(p+1)} + a_p \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} f^{(p+j)} \\ &= f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + a_p f^{(p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\ &= f' + \sum_{\ell=2}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\ &\quad + b_{1,p} f^{(p+1)} + \frac{a_0}{(p+1)!} f^{(p+1)} + a_p f^{(p+1)}. \end{aligned}$$

Posons $\boxed{a_p = -b_{1,p} - \frac{a_0}{(p+1)!}}$. Alors,

$$\sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-2} b_{\ell+1,p} f^{(p+1+\ell)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{\ell=1}^{p-1} a_{\ell} f^{(p+1+\ell)} + \sum_{\ell=1}^p \frac{a_p}{(\ell+1)!} f^{(p+1+\ell)}, \text{ ce qui}$$

est bien de la forme $f' + \sum_{\ell=1}^p b_{\ell,p+1} f^{(l+p+1)}$ si l'on convient que pour tout $\ell \in \{1, \dots, p-2\}$,

$$\boxed{b_{\ell,p+1} = b_{\ell+1,p} + \frac{a_{\ell}}{(p+1)!} + \frac{a_p}{(\ell+1)!}}, \text{ que } \boxed{b_{p-1,p+1} = \frac{a_{p-1}}{(p+1)!} + \frac{a_p}{p!} \text{ et } b_{p,p+1} = \frac{a_p}{(p+1)!}}$$

Par hypothèse, $(a_0, \dots, a_{p-1})$ et $(b_{\ell,k})_{\substack{2 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq k-1}}$ ne dépendent pas de f , donc c'est encore le cas pour a_p et $(b_{\ell,p+1})_{1 \leq \ell \leq p}$, ce qui prouve $R(p+1)$.

12°) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $R(p)$ lorsque $I = \mathbb{R}$ et que f est l'application $t \mapsto e^{xt}$, qui est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

on a alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k e^{xt}$ donc, pour $t = 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) &= \sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k x^{k+j} \right) = \sum_{i=1}^{2p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=i \\ 1 \leq j \leq p, 0 \leq k \leq p-1}} \frac{a_k}{j!} \right) x^i \\ &= a_0 x + \sum_{i=2}^p \left(\sum_{j=1}^i \frac{a_{i-j}}{j!} \right) x^i + \sum_{l=1}^{p-1} \left(\sum_{\substack{j+k=l+p \\ 1 \leq j \leq p, 0 \leq k \leq p-1}} \frac{a_k}{j!} \right) x^{l+p} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{j!} g^{(j)}(0) = f'(0) + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)}(0) = x + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} x^{\ell+p}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, les polynômes concernés ont les mêmes coefficients. On en déduit que $a_0 = 1$ et $\forall i \in \{2, \dots, p\}$, $\sum_{j=1}^i \frac{a_{i-j}}{j!} = 0$, donc

$a_{i-1} = -\sum_{j=2}^i \frac{a_{i-j}}{j!}$. On peut utiliser cette formule en remplaçant p par $p+1$ et i par

$p+1$. On obtient que $\forall p \geq 2$, $a_p = -\sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!}$.

13°) On utilise la relation précédente :

$$\diamond a_2 = -\left(\frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!}\right) = -\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{3}{12} - \frac{2}{12}, \text{ donc } \boxed{a_2 = \frac{1}{12}}.$$

$$\diamond a_3 = -\left(\frac{a_2}{2!} + \frac{a_1}{3!} + \frac{a_0}{4!}\right) = -\left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right), \text{ donc } \boxed{a_3 = 0}.$$

$$\diamond a_4 = -\left(\frac{a_3}{2!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_0}{5!}\right) = -\left(\frac{1}{12 \times 6} - \frac{1}{2 \times 24} + \frac{1}{120}\right), \text{ donc } a_4 = \frac{-10 + 15 - 6}{12 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5}.$$

Ainsi, $\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}}.$

14°) Montrons que $|a_p| \leq 1$ par récurrence sur p .

La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ car $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$.

Soit $p \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $|a_k| \leq 1$. Alors d'après la

question précédente, $|a_p| = \left| \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!} \right| \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-j}|}{j!}$, donc d'après l'hypothèse de

récurrence, $|a_p| \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{j!} \leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = e - 2 < 1$.

D'après le principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}, |a_p| \leq 1$.

15°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. D'après la question précédente,

$\forall p \in \mathbb{N}, |a_p z^p| \leq |z|^p$, or $\sum |z|^p$ est une série géométrique convergente car $|z| < 1$, donc

$\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ est absolument convergente.

16°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par distributivité,

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{p=0}^N a_p z^p\right) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 0 \leq p \leq N}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p}, \text{ puis par sommation par paquets,}$$

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{p=0}^N a_p z^p\right) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{\substack{n+p=k \\ n \geq 1}} \frac{a_p}{n!}\right) z^k + z^{N+1} B_N(z), \text{ où } B_N(z) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 0 \leq p \leq N \\ n+p \geq N+1}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}.$$

Si $k \geq 2$, $\sum_{\substack{n+p=k \\ n \geq 1}} \frac{a_p}{n!} = \sum_{n=1}^k \frac{a_{k-n}}{n!} = 0$ d'après la question 12,

et si $k = 1$, $\sum_{\substack{n+p=k \\ n \geq 1}} \frac{a_p}{n!} = a_0 = 1$, donc $\left(\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{p=0}^N a_p z^p\right) = z + z^{N+1} B_N(z)$. Il reste

donc à montrer que $z^{N+1} B_N(z) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

Or, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n + p \geq N + 1$, $\left|\frac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}\right| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire, $|B_N(z)|$ est inférieur au cardinal

de $\{(n, p) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, N\} / n + p \geq N + 1\}$, donc est inférieur à $N(N + 1)$.

Ainsi, $0 \leq |z^{N+1} B_N(z)| \leq |z|^{N+1} N(N + 1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ d'après le théorème des croissances

comparées, car $|z| < 1$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

17°) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$. On fait tendre N vers $+\infty$ dans la question précédente. Les séries concernées étant convergentes,

on obtient que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right) = z$, donc $(e^z - 1)\varphi(z) = z$.

Supposons que $e^z = 1$, alors en passant aux modules, $e^{\operatorname{Re}(z)} = 1$, donc $\operatorname{Re}(z) = 0$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = i\theta$. Alors $e^{i\theta} = 1$, donc $\theta \equiv 0[2\pi]$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$, or $z \neq 0$, donc $|k| \geq 1$ puis $|z| \geq 2\pi > 1$, ce qui est faux. Ainsi, $e^z \neq 1$, ce qui permet d'écrire que $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

18°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + t^n g(t)$, où $g(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k t^{k-n}$.

Il s'agit donc de montrer que $g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

D'après la question 14, on a par inégalité triangulaire :

$0 \leq |g(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |t|^{k-n} = \frac{|t|}{1 - |t|} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

19°) Soit $t \in]-1, 1[$. Posons $\psi(t) = \varphi(t) + \frac{t}{2}$. ψ est paire sur $] -1, 1[$. En effet, d'après la question 17, $\psi(t) = \frac{t}{2} + \frac{t}{e^t - 1} = \frac{2t + t(e^t - 1)}{2(e^t - 1)} = \frac{t e^t + 1}{2 e^t - 1} = \frac{t e^{t/2} + e^{-t/2}}{2 e^{t/2} - e^{-t/2}} = \psi(-t)$, or $\psi(t) = \varphi(t) - a_1 t$, donc d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $\psi(t) = 1 + \sum_{k=2}^n a_k t^k + o(t^n)$ et $\psi(t) = \psi(-t) = 1 + \sum_{k=2}^n a_k (-1)^k t^k + o(t^n)$, donc d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k+1} = -a_{2k+1}$, donc $a_{2k+1} = 0$.

Partie V : Seconde étude asymptotique du reste

20°) Si $f(x) = \frac{1}{(1 - \alpha)x^{\alpha-1}}$ alors f donc g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut ainsi appliquer la question 3 à g avec $n = 2p$:

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(k) + \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(k) + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 g^{(2p+1)}(k+t) (1-t)^{2p} dt \\ &= g(k) + f'(k) + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell, 2p} f^{(\ell+2p)}(k) \\ &\quad + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i+2p+1)}(k+t) \right) (1-t)^{2p} dt. \end{aligned}$$

On établit par récurrence sur n que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{x^{\alpha+n-1}}$, donc

$$\begin{aligned}
|R(k)| &= \left| \sum_{n=2p+1}^{4p-1} b_{n-2p,2p} (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{k^{\alpha+n-1}} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1} (-1)^{n-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}} \right] (1-t)^{2p} dt \right| \\
&\leq \sum_{n=2p+1}^{4p-1} |b_{n-2p,2p}| \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{k^{\alpha+n-1}} \\
&\quad + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 \left(\sum_{n=2p+1}^{4p} |a_{n-2p-1}| \frac{\alpha \cdots (\alpha + n - 2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}} \right) (1-t)^{2p} dt \\
&\leq \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} \left(|b_{n-2p,2p}| + \frac{|a_{n-2p-1}|}{(2p)!} \right) \alpha \cdots (\alpha + n - 2) \right] k^{-(2p+\alpha)},
\end{aligned}$$

en convenant que $b_{2p,2p} = 0$.

Notons A la quantité située entre crochets. Elle est indépendante de k , donc, p et α étant fixés, $\exists A \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^*, |R(k)| \leq A k^{-(2p+\alpha)}$.

21°) D'après la question précédente, $R(k) = O\left(\frac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ et $2p + \alpha > 1$ donc la série $\sum_{k \geq 1} R(k)$ est convergente et on a, par sommation des relations de comparaison,

$$\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = O(R_n(2p + \alpha)) = O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right) \text{ d'après la question 7.}$$

$$\text{Or } R(k) = g(k+1) - g(k) - \frac{1}{k^\alpha}$$

$$\text{où } g(k) = \frac{a_0}{(1-\alpha)k^{\alpha-1}} + \sum_{i=1}^{2p-1} a_i (-1)^{i-1} \frac{\alpha \cdots (\alpha + i - 2)}{k^{\alpha+i-1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, \text{ car } \alpha > 1, \text{ donc la}$$

$$\text{série télescopique } \sum_{k \geq 1} (g(k+1) - g(k)) \text{ converge et on a } \sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) - R_n(\alpha).$$

On en déduit que $R_n(\alpha) = -g(n) - \sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. De plus, $p \geq 2$, donc d'après la question 19, $a_{2p-1} = 0$. Ceci donne

$$\forall p \geq 2, R_n(\alpha) = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\right) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right).$$

22°) Pour $p = 3$, il vient

$$\begin{aligned}
R_n(\alpha) &= -\left(\frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+5}}\right) \text{ soit, en} \\
\text{particulier, } R_n(3) &= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{4n^4} - \frac{1}{12n^6} + O\left(\frac{1}{n^8}\right).
\end{aligned}$$