

Feuille d'exercices 16.

Corrigé de quatre exercices.

Exercice 16.13 :

◇ f étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| \leq \alpha \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$.

◇ Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut relier x à $\lfloor x \rfloor$ par des pas de longueurs inférieures à α . En effet, si $m \in \mathbb{N}^*$, on relie x à $\lfloor x \rfloor$ par des pas de longueur inférieure à $\frac{1}{m}$ en posant, pour tout $k \in \{0, \dots, m\}$, $x_k = \lfloor x \rfloor + \frac{k}{m}(x - \lfloor x \rfloor)$: $x_0 = \lfloor x \rfloor$, $x_m = x$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}_m$, $|x_k - x_{k-1}| = \frac{x - \lfloor x \rfloor}{m} \leq \frac{1}{m}$.

Il suffit donc de choisir $m \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $\frac{1}{m} \leq \alpha$, c'est-à-dire $m \geq \frac{1}{\alpha}$. Posons donc $m = \lceil \frac{1}{\alpha} \rceil$.

◇ Alors, par somme télescopique, $f(x) - f(\lfloor x \rfloor) = f(x_m) - f(x_0) = \sum_{k=0}^{m-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k))$,

donc par inégalité triangulaire, $|f(x) - f(\lfloor x \rfloor)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$, or pour tout

$k \in \{0, \dots, m-1\}$, $|x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1}{m} \leq \alpha$, donc $|f(x) - f(\lfloor x \rfloor)| \leq \sum_{k=0}^{m-1} 1 = m$.

◇ Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. $f(n) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que,

pour tout $n \geq N$, $f(n) \geq M + m$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq N + 1$. Alors $\lfloor x \rfloor \geq N$, donc $f(\lfloor x \rfloor) \geq M + m$, puis

$f(x) = f(\lfloor x \rfloor) + (f(x) - f(\lfloor x \rfloor)) \geq M + m - |f(x) - f(\lfloor x \rfloor)|$,

donc $f(x) \geq (M + m) - m = M$.

Ainsi, on a montré que, pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \geq N + 1$, $f(x) \geq M$. Ceci prouve que $f(x) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}]{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 16.14 :

1°) Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E .

Supposons que D continue pour $\|\cdot\|$. Alors, D étant un endomorphisme, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $f \in E$, $\|f'\| \leq k\|f\|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : x \mapsto e^{nx}$. $f_n \in E$ et $D(f_n) = nf_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|nf_n\| \leq k\|f_n\|$. Or $f_n \neq 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq k$, ce qui est faux. Ainsi, D est discontinue.

2°) Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors $D|_F$ est une application linéaire de F dans E , or F est de dimension finie, donc d'après le cours, $D|_F$ est continue.

3°) $\diamond$ Prenons sur $F = \mathbb{R}[X]$ la restriction de la norme infinie sur E . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D(X^n) = nX^{n-1}$, donc $\|D(X^n)\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |nx^{n-1}| = n$ et $\|X^n\|_\infty = 1$. On peut alors

adapter le raisonnement de la question 1 et montrer que $D|_F$ est discontinue avec cette norme.

$\diamond$ Si $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in F$, posons $\|P\| = \sum_{k \in \mathbb{N}} k!|a_k|$. On vérifie que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur F .

De plus $P'(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (k+1)a_{k+1}X^k$, donc $\|D(P)\| = \sum_{k \in \mathbb{N}} k!(k+1)|a_{k+1}| \leq \|P\|$, ce qui prouve que D est continue pour cette norme.

Exercice 16.17 :

1°) Cette équation est équivalente à $f_n(x) = 0$, où f_n est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - x - n$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1$,

donc $f'_n(x) = 0 \iff x = (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$.

On peut ainsi dresser le tableau de variations (à faire).

Entre 0 et $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$, f_n décroît en partant de $f_n(0) = -n < 0$, donc f_n ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, (\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}]$.

$f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc d'après le TVI (f_n est bien continue) et le fait qu'une application

strictement croissante est injective, f_n s'annule en un unique réel entre $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}$ et $+\infty$. Ainsi, l'équation $x^n = x + n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n .

2°) $f_n(2) = 2^n - 2 - n$, or d'après la formule du binôme de Newton,

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{n}, \text{ car } n \geq 2, \text{ donc } 2^n \geq 1 + n + 1$$

puis $f_n(2) \geq 0 = f_n(x_n)$, or f_n est strictement croissante sur $[(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n-1}}, +\infty[$, donc $x_n \leq 2$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) et 4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(x_n + n)}$, or d'après la question précédente, $x_n = \mathbf{O}(1)$, donc $x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(n(1+O(\frac{1}{n})))} = e^{\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} O(\frac{1}{n})} = e^{\frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln n}{n})}$. Ainsi,

$$x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right), \text{ ce qui conclut.}$$

On peut poursuivre ce développement asymptotique, même si cela n'est pas demandé.

Ce qui précède montre que $\frac{x_n}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc

$x_n = e^{\frac{1}{n} \ln(n+x_n)} = e^{\frac{1}{n} \ln(n(1+\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))} = e^{\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$, puis
 $x_n = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(\frac{u^2}{2})$, en posant $u = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.
 $u \sim \frac{\ln n}{n}$, donc $u^2 \sim \frac{\ln^2 n}{n^2}$. Ainsi, d'après les croissances comparées, $u = \frac{\ln n}{n} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$ et
 $u^2 = \frac{\ln^2 n}{n^2} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$, donc $x_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})$.

Exercice 16.21 :

g est croissante. En effet, si $x, y \in [0, 1]$ avec $x \leq y$, $f([0, x]) \subset f([0, y])$, donc d'après le cours, $g(x) \leq g(y)$.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Montrons que g est également uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, si $|x - y| \leq \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soit $x, y \in [0, 1]$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x \leq y$.

Ainsi, $0 \leq g(y) - g(x)$.

Si $g(y) = g(x)$, alors $0 \leq g(y) - g(x) = 0 \leq \varepsilon$, donc $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$.

Supposons maintenant que $g(y) > g(x)$. f étant continue sur le compact $[0, y]$, d'après le cours, il existe $\beta_y \in [0, y]$ tel que $g(y) = \sup_{t \in [0, y]} f(t) = f(\beta_y)$.

Si $\beta_y \in [0, x]$, alors $g(y) = f(\beta_y) \leq g(x)$, ce qui est faux, donc $\beta_y \in]x, y]$.

Ainsi, $|\beta_y - x| \leq |y - x| \leq \alpha$, donc $|f(\beta_y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Or $0 \leq g(y) - g(x) \leq f(\beta_y) - f(x)$, car $g(x) \geq f(x)$, donc on a également dans ce cas $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$, ce qui conclut.