

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 18 : du lundi 9 mars au vendredi 13.

Liste des questions de cours

- 1°) Pour la notion de limite d'une fonction en un point, montrer l'équivalence entre la caractérisation séquentielle et la caractérisation par ε .
- 2°) Donner les trois caractérisations de la continuité de f en a .
- 3°) Que peut-on dire lorsque f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A ? Démontrez-le.
- 4°) Démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas d'une fonction croissante et majorée sur un intervalle majoré.
- 5°) Montrer qu'un produit cartésien d'un nombre fini de compacts est compact.
- 6°) Énoncer et démontrer le TVI.
- 7°) Énoncer et démontrer un théorème qui caractérise la continuité à l'aide d'ouverts.
- 8°) Énoncer puis démontrer un théorème qui caractérise la continuité des applications linéaires.
- 9°) Que dire de l'image directe d'un compact par une application continue? Démontrez-le.
- 10°) Énoncer et démontrer l'équivalence entre la caractérisation par ε et la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.
- 11°) Montrer que les réciproques de la proposition "lispchitzienne" $\implies$ "uniformément continue" $\implies$ "continue" sont fausses.

Première partie

Révisions sur la topologie

cf le programme de colles précédent.

Deuxième partie

Limites de fonctions et continuité

Par défaut, E et F sont deux espaces métriques et f est une fonction de E dans F , définie sur $\mathcal{D}_f$.

1 Limite en un point

Notation. On fixe une partie A de $\mathcal{D}_f$. On fixe également a , qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

1.1 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \right)$.

Unicité de la limite.

Lorsque $F = \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$ si et seulement si $(\operatorname{Re}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(\ell)) \wedge (\operatorname{Im}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \xrightarrow[x \in B]{x \rightarrow a} l$, alors $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$.

1.2 Caractérisation par “ ε ”

Si $a \in E$ et $l \in F$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (d(x, a) \leq \alpha \implies d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.

Adaptation aux cas des limites infinies.

1.3 Caractérisation par voisinages

Voisinages de $\pm\infty$ dans $\mathbb{R}$, voisinages de ∞ dans E .

Propriété. $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall V \in \mathcal{V}(l) \exists U \in \mathcal{V}(a) f(U \cap A) \subset V$.

Caractère local de la notion de limite : Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff f(x) \xrightarrow[x \in A \cap U_0]{x \rightarrow a} l$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, limite à gauche et à droite en a de $f(x)$.

$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} l$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l$ et $f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l$.

2 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f]{x \rightarrow a} f(a)$.

Propriété. Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), f est toujours continue en a .

Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}]{x \rightarrow a} f(a)$.

Les applications lipschitziennes sont continues.

Si f est continue en a , alors $f|_A$ est aussi continue en a .

Lorsque $E = \mathbb{R}$, continuité à gauche et à droite.

Prolongement par continuité.

Si f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A , alors f et g coïncident sur A .

3 Théorèmes de composition

Pour que $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} m$, il suffit que $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(y) \xrightarrow[y \in B]{y \rightarrow l} m$.

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} b$ et si g est continue en b , alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} g(b)$.

Continuité d'une composée.

Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.

4 Opérations algébriques sur les limites

4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l'$, alors $(f + g)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l + l'$.

C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$.

La somme de deux applications continues est continue.

4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l'$, alors $(fg)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} ll'$.

C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé dans un autre $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

La $\mathbb{K}$ -algèbre des applications continues d'une partie d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé dans $\mathbb{K}$.

5 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Passage à la limite sur une inégalité *large*.

Principe du tunnel : Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a , $\alpha < f(x) < \beta$.

Principe des gendarmes.

Théorème de la limite monotone.

Si $f :]m, M[\rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

6 Continuité globale

6.1 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection.

6.2 Continuité et ouverts

f est continue si et seulement si les images réciproques des ouverts (resp : fermés) sont des ouverts (resp : fermés) relatifs de $\mathcal{D}_f$.

6.3 Continuité d'une application linéaire.

$f \in L(E, F)$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E , ou encore si et seulement si il existe k tel que $\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

Formules : $\|u(x)\| \leq \|u\|\|x\|$, $\|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\|$.

6.4 Continuité et compacité

L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue avec A compact, alors f est bornée et elle atteint ses bornes,

L'image directe d'un segment de $\mathbb{R}$ par une application continue à valeurs réelles est un segment.

6.5 La continuité uniforme

Caractérisation par ε et caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

Composée d'applications uniformément continues.

"lispchitzienne" $\implies$ "uniformément continue" $\implies$ "continue", mais les réciproques sont fausses.

Théorème de Heine.

Prévisions pour la semaine prochaine :

o, O, équivalents, développements limités. Application aux séries.