

Résumé de cours :
Semaine 22 : lundi 9 et vendredi 13 mars.

Dérivation (suite)

E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, I un intervalle d'intérieur non vide et f une application de I dans E .

1 Opérations sur les fonctions dérivables (fin)

Propriété. Soient F un second $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et u une application linéaire continue de E dans F . Si f est dérivable en a , alors $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.

Propriété. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si f est dérivable, alors $\overline{f}$ est dérivable et $\overline{f}' = \overline{f'}$.

Propriété de linéarité. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si f et g sont dérivables en a , alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

Théorème de dérivation d'un produit : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient f une application de I dans E et g une application de I dans F . On dispose de l'application $B(f, g) : I \rightarrow G$
 $t \mapsto B(f(t), g(t))$. Si f et g sont dérivables en a , $B(f, g)$ est dérivable en a et $B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. $\left(\prod_{i=1}^p f_i \right)'(a) = \sum_{i=1}^p \left[f_i'(a) \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} f_j(a) \right]$.

Dérivation des fonctions composées. Soient $\varphi : I \rightarrow J$ et $f : J \rightarrow E$ deux applications. Si φ est dérivable en a et f en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)f'(\varphi(a))$.

Dérivée de l'inverse.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}^*$ une application dérivable en a . Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f} \right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Dérivée logarithmique. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}^*$ dérivable en a .

$\frac{f'(a)}{f(a)}$ est appelée la dérivée logarithmique de f en a . Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, elle est égale à $(\ln |f|)'(a)$.

Propriété. Si u et v sont dérivables de I dans $\mathbb{K}^*$, $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$, $\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(u^n)'}{u^n} = n \frac{u'}{u}$, et, si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \frac{(u^\alpha)'}{u^\alpha} = \alpha \frac{u'}{u}$.

2 Dérivées d'ordre supérieur

2.1 Définition

Définition. $f^{(0)} = f$, $f^{(n)}(t) = (f^{(n-1)})'(t)$.

Propriété. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, f est $p + q$ fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I , auquel cas, $f^{(p+q)} = [f^{(p)}]^{(q)}$.

Remarque. On dit que f est n fois dérivable en a si et seulement si il existe une boule ouverte B centrée en a telle que $f|_{B \cap I}$ soit $n - 1$ fois dérivable et telle que $[f|_{B \cap I}]^{(n-1)}$ soit dérivable en a .

Définition. On dit que f est de classe D^n (resp : C^n) si et seulement si $f^{(n)}$ est une application définie sur I (resp : définie et continue).

On dit que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Opérations sur les dérivées supérieures

Propriété de linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont D^n , alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ est D^n et $[\alpha f + \beta g]^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Formule de Leibniz : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et $B : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient f une application de I dans E et g une application de I dans F . On dispose de l'application

$$B(f, g) : I \rightarrow G$$

$$t \mapsto B(f(t), g(t)).$$

Soit $a \in I$; Si f et g sont dérivables n fois en a , $B(f, g)$ est dérivable n fois en a

et $B(f, g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n C_n^k B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le produit de deux applications C^n est C^n .

Théorème de composition : Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Soient $\varphi : I \rightarrow J$ et $f : J \rightarrow E$ deux applications.

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si φ et f sont C^n alors $f \circ \varphi$ est C^n .

Il faut savoir le démontrer.

3 L'égalité des accroissements finis

Dans ce paragraphe, toutes les applications utilisées sont définies sur I et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Extremum et point critique

Définition. f admet un maximum local en a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall t \in V \cap I \quad f(t) \leq f(a)$.

f présente en a un maximum local strict si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $\forall t \in V \cap I \setminus \{a\} \quad f(t) < f(a)$.

Définition. Lorsque f est dérivable en $a \in \overset{\circ}{I}$, a est un point critique de f si et seulement si $f'(a) = 0$.

Théorème. Les extremums locaux de f sur $\overset{\circ}{I}$ sont des points critiques de f . Réciproque fausse.

Il faut savoir le démontrer.

3.2 Le lemme de Rolle

Lemme de Rolle. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur l'ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Le lemme de Rolle est faux pour une application à valeur dans $\mathbb{C}$: prendre $\begin{matrix} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{matrix}$.

Un exercice à connaître : On dit qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si il se décompose sous la forme $P(x) = \lambda \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$, où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec $i \neq j \implies \alpha_i \neq \alpha_j$. Si P est simplement scindé dans $\mathbb{R}[X]$, alors P' l'est aussi.

Théorème de Rolle généralisé (Hors programme).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Il faut savoir le démontrer.

3.3 L'égalité des accroissements finis

Théorème des accroissements finis (TAF). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Il faut savoir le démontrer.

3.4 Théorème de la limite de la dérivée

TLD : Si f est continue sur I , dérivable (resp : de classe C^1) sur $I \setminus \{a\}$ et s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \in I \setminus \{a\}} l$, alors f est dérivable (resp : de classe C^1) sur I , avec $f'(a) = l$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Il faut savoir montrer que, si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \in I \setminus \{a\}} +\infty$, alors f n'est pas dérivable en a .

Remarque. Ce théorème est encore valable pour une fonction à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

TLD : Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur. Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si f est continue sur I , à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, si f est de classe C^k sur $I \setminus \{a\}$ et si, pour tout $h \in [1, k] \cap \mathbb{N}$, il existe $l_h \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(h)}(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \in I \setminus \{a\}} l_h$, alors f est de classe C^k sur I .

4 Formules de Taylor

4.1 L'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme)

Théorème. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est C^n sur $[a, b]$ et $n + 1$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Il faut savoir le démontrer.

4.2 L'inégalité des accroissements finis (IAF)

Théorème. Inégalité des accroissements finis (IAF)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est C^1 sur $[a, b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leq \lambda |b - a|$, où $\lambda = \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Corollaire. Soient $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe C^1 .

Alors f est k -lipschitzienne si et seulement si pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq k$.

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 TRI et inégalité de TL

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ C^{k+1} .

Alors $f(b) = f(a) + \sum_{h=1}^k \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$.

Théorème. Inégalité de Taylor-Lagrange. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ C^{k+1} .

Alors $|f(b) - f(a) - \sum_{h=1}^k \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)| \leq \lambda \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!}$, où $\lambda = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(k+1)}(x)|$.

4.3.2 Primitivation d'un développement limité

Lemme. Soit $k \in \mathbb{N}$. Au voisinage de a , $\int_a^x o((t-a)^k) dt = o((x-a)^{k+1})$.

Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Primitivation d'un développement limité. Soient $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une application de classe C^1 . Soit $k \in \mathbb{N}$. Si, au voisinage de a ,

$$f'(x) = \sum_{h=0}^k \alpha_h (x-a)^h + o((x-a)^k), \text{ alors } f(x) = f(a) + \sum_{h=0}^k \frac{\alpha_h}{h+1} (x-a)^{h+1} + o((x-a)^{k+1}).$$

4.3.3 Formule de TY

Formule de Taylor-Young. Si f est k fois dérivable en a , alors au voisinage de a ,

$$f(x) = f(a) + \sum_{h=1}^k \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + o((x-a)^k).$$

Propriété. (Hors programme ?) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable en un point a de $\overset{\circ}{I}$. On suppose que $f'(a) = 0$ et que $f''(a) > 0$. Alors a est un minimum local strict : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $t \in V \cap I \setminus \{a\}$, $f(t) > f(a)$.

5 Monotonie et dérivabilité

Ici les applications utilisées sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

5.1 Sens de variation

Théorème. f est constante si et seulement si $f' = 0$, elle est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ et elle est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et croissante. Alors f est strictement croissante si et seulement si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide. En particulier, si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf pour un nombre fini d'éléments de I , alors f est strictement croissante.