

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 19 : du lundi 16 au vendredi 20 mars.

## Comparaison au voisinage d'un point et séries

### Liste des questions de cours

- 1°) Montrer que  $\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$ .
- 2°) Montrer que  $o(f) + o(f) = o(f)$ .
- 3°) Sous des conditions à préciser, montrer que  $f(x) \sim g(x) \implies \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$ .
- 4°) Énoncer précisément puis démontrer le théorème de changement de variable pour les  $o$ ,  $O$  et  $\sim$ .
- 5°) Énoncer et démontrer l'unicité du développement limité.
- 6°)  $\text{DL}_2(0)$  de  $e^{(\cos \sqrt{t})}$ .
- 7°) Énoncer le théorème de sommation des relations de comparaison. Démontrez-le pour les " $o$ " en cas de divergence.
- 8°) Moyennes de Cesaro : énoncé et démonstration.
- 9°) Montrer que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- 10°) Nature des séries de Bertrand : énoncé et démonstration.

### 1 $o$ , $O$ et $\sim$

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Notation.**  $A$  est une partie d'un espace  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé  $E$ . Soit  $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$ . On suppose que tout voisinage de  $a$  rencontre  $A$ .

Les applications considérées sont définies sur  $A$  et sont à valeurs dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

#### 1.1 La relation de domination

$$f(x) = \mathbf{O}_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}}(g(x)) \iff [\exists V \in \mathcal{V}(a) \ \exists C \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in V \cap A \ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|].$$

Cas particulier des suites.

Si  $g(x) \neq 0$  au voisinage de  $a$ ,  $f = \mathbf{O}(g)$  si et seulement si  $x \mapsto \frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$  est bornée au voisinage de  $a$ .

$$\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f), \mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f),$$

Lorsque  $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{O}(\varphi) \cdot \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi \cdot f)$ . Si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , lorsque  $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)$ .

Si  $f(x) = \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\mathbf{O}}}(g(x))$  et si  $g(x) \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow}} 0$ , alors  $f(x) \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow}} 0$ .

(Hors programme) Si  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  vérifient  $\forall n \geq N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ , alors  $u_n = \mathbf{O}(v_n)$ .

## 1.2 La relation de prépondérance

$$f(x) = \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{o}}(g(x)) \iff [\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists V \in \mathcal{V}(a) \forall x \in V \cap A \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|].$$

Cas particulier des suites.

Si  $g(x) \neq 0$  au voisinage de  $a$ ,  $f = o(g)$  si et seulement si  $\frac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow}} 0$ .

$$o(f) = \mathbf{O}(f), o(\mathbf{O}(f)) = o(f) \text{ et } \mathbf{O}(o(f)) = o(f) \text{ (donc aussi } o(o(f)) = o(f)).$$

$o(f) + o(f) = o(f)$ , Lorsque  $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$ ,  $o(\varphi) \cdot \mathbf{O}(f) = o(\varphi \cdot f)$  et  $\mathbf{O}(\varphi) \cdot o(f) = o(\varphi \cdot f)$  (donc aussi  $o(\varphi) \cdot o(f) = o(\varphi \cdot f)$ ). Si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , lorsque  $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $o(f)^\alpha = o(f^\alpha)$ .

**Théorème des croissances comparées :** Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$  et  $a > 1$ .

1. Les suites  $\ln^\alpha(n)$ ,  $n^\beta$ ,  $a^n$  et  $n!$  tendent vers  $+\infty$  et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de  $+\infty$ , les fonctions  $\ln^\alpha x$ ,  $x^\beta$  et  $e^{\gamma x}$  tendent vers  $+\infty$  et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de  $0^+$ ,  $|\ln x|^\alpha = o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ .
4. Au voisinage de  $-\infty$ ,  $e^{\gamma x} = o\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ .

## 1.3 La relation d'équivalence

### 1.3.1 Définition

$$f(x) \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\sim}} g(x) \iff f = g + o(g).$$

On suppose qu'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $g(x)$  ne s'annule jamais et que  $f$  et  $g$  sont à valeurs

dans  $\mathbb{K}$ . Alors  $f \sim g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \in A}{\underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow}} 1$ .

La relation " $\sim$ " est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{F}(A, F)$ .

### 1.3.2 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

**Stabilité du produit.** Si  $\varphi \sim \Psi$ , avec  $\varphi$  et  $\Psi$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , et si  $f \sim g$ , alors  $\varphi \cdot f \sim \Psi \cdot g$ .

Si  $f \sim g$ , alors  $\|f\| \sim \|g\|$ ,  $\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{g(x)}$ ,  $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$ .

Si  $f \sim g$ ,  $f(x)$  et  $g(x)$  ont même signe au voisinage de  $a$ , elles ont même limite en cas d'existence.

La condition  $f = \mathbf{O}(g)$  (respectivement  $f = o(g)$ ,  $f \sim g$ ) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant  $f$  et  $g$  par des applications équivalentes.

(Hors programme : ) Sous de bonnes conditions,  $f(x) \sim g(x) \implies \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$ .

Théorème de changement de variable pour les  $o$ ,  $O$  et  $\sim$ .

### 1.3.3 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

En général, si  $f(x) \sim g(x)$ ,  $\varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))$ .

L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable pour la somme.

## 1.4 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, on suppose que  $E = \mathbb{K}$  et que  $a$  est un point d'accumulation de  $A$ .

### 1.4.1 Définitions

Développements limités au sens faible et fort, partie principale.

unicité du développement limité.

Cas des fonctions paires ou impaires.

### 1.4.2 Opérations sur les développements limités

Les règles de calcul établies pour les “ $o$ ” et les “ $O$ ” permettent d'additionner, de multiplier et de composer des développements limités entre eux.

Il est souvent pratique d'écrire le DL  $\sum_{k=m}^n a_k x^k + o(x^n)$  sous sa forme normalisée  $a_m x^m (1 + \dots + o(x^{n-m}))$ .

### 1.4.3 Applications

Détermination de la tangente et positionnement local du graphe par rapport à cette tangente.

Détermination d'une asymptote oblique et positionnement asymptotique du graphe par rapport à cette asymptote.

## 2 Séries

Réviser ce qui a déjà été fait.

Théorème de sommation des relations de comparaison.

Application aux moyennes de Cesaro.

Séries de Bertrand (hors programme).

## Prévisions pour la semaine suivante :

Dérivation.