DS 7

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

$\mathcal{S}_6$ désigne le groupe des bijections de $\mathbb{N}_6$ dans lui-même. On admettra que dans $\mathcal{S}_6$, deux cycles à supports disjoints commutent. En utilisant seulement ce résultat, calculer l'ordre dans $\mathcal{S}_6$ de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ (cela signifie que, pour i en première ligne, $\sigma(i)$ est en deuxième ligne à la verticale de i).

Exercice 2 :

Résoudre l'équation $(E)\ :\ x^2 + 5x + \overline{13} = 0$, où l'inconnue x est un élément de $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

Exercice 3 :

Déterminer la nature de $\sum a_n$, où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln^3 n}$.

Problème : Connexité

Pour tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou bien le corps $\mathbb{C}$. De plus E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, dont la norme sera notée $\|.\|$. On notera d la distance associée à cette norme.

Partie I : Connexité par arcs

On rappelle que, si $a, b \in E$, le segment d'extrémités a et b, noté $[a, b]$, est défini par : $[a, b] = \{(1-t)a + tb \ / \ t \in [0, 1]\}$.
On rappelle qu'une partie A de E est convexe si et seulement si, pour tout $a, b \in A$, $[a, b] \subset A$.

1°) Montrer que toute boule ouverte de E est convexe.

2°) Soit $a, b \in E$. Montrer que le segment $[a, b]$ est convexe.

Définition. On appelle chemin continu dans E toute application continue f de $[0,1]$ dans E. On dit alors que $f(0)$ et $f(1)$ sont les extrémités du chemin f et que $\{f(t)/t \in [0,1]\}$ est le support du chemin.

Définition. Si A est une partie de E, on dit que A est connexe par arcs si et seulement si, pour tout $(M,N) \in A^2$, il existe un chemin continu d'extrémités M et N dont le support est inclus dans A, i.e si et seulement si il existe $f\ :\ [0,1] \to A$ continue telle que $f(0) = M$ et $f(1) = N$.

3°) Montrer que toute partie convexe de E est connexe par arcs.

4°) Soit I un ensemble quelconque non vide et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de E telle que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

Définition. Soit $A \subset E$ et $a \in A$. On dit que A est étoilée par rapport à a si et seulement si pour tout $x \in A$, $[a,x] \subset A$.
On dit que A est étoilée si et seulement si il existe $a \in A$ tel que A est étoilée par rapport à a.

5°) Montrer que toute partie étoilée est connexe par arcs.

6°) Soit f une fonction de E dans un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F, définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit A une partie de $\mathcal{D}_f$.
Si f est continue et si A est connexe par arcs, montrer que $f(A)$ est également connexe par arcs.

Partie II : Connexité

Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est connexe si et seulement si les seules parties de A qui sont à la fois ouvertes et fermées (pour la topologie relative de A) sont $\emptyset$ et A.
On rappelle que les ouverts pour la topologie relative de A sont exactement les $U \cap A$, où U est un ouvert au sens de la topologie globale de E. Et de même, les fermés pour la topologie relative de A sont exactement les $F \cap A$, où F est un fermé au sens de la topologie globale de E.

7°) Soit A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = d(A,x)$. Montrer que f est continue.

8°) Supposons que A et B sont deux parties non vides de E telles que $d(A,B) > 0$.
On pose $\alpha = \dfrac{d(A,B)}{2}$, $U = \{x \in E/d(x,A) < \alpha\}$ et $V = \{x \in E/d(x,A) > \alpha\}$.
Montrer que U et V sont deux ouverts disjoints pour la topologie globale de E.
En déduire que $A \cup B$ n'est pas connexe.

9°) Soit A une partie de E. Montrer que A est connexe si et seulement si les seules applications continues de A dans $\{0,1\}$ sont les deux applications constantes.

10°) En déduire que si A est une partie de E connexe par arcs, alors A est connexe. Avec les notations et les hypothèses de la question 8, montrer que $A \cup B$ n'est pas connexe par arcs.

11°) On rappelle que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- I est un intervalle ;
- I est connexe par arcs ;
- I est connexe.

12°) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue et injective de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.

Partie III : Propriétés de la connexité

13°) Soit f une fonction de E dans un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F, définie sur $\mathcal{D}_f$. Soit A une partie de $\mathcal{D}_f$.
Si f est continue et si A est connexe, montrer que $f(A)$ est également connexe.

14°) Soit A une partie connexe de E et soit A' une partie de E telle que $A \subset A' \subset \overline{A}$, où $\overline{A}$ désigne l'adhérence de A pour la topologie globale de E.
Montrer que A' est connexe.

15°) Soit A une partie connexe non vide de E.
Soit f une application définie sur A et à valeurs dans un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F.
On suppose que f est localement constante, c'est-à-dire que, pour tout $a \in A$, il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V \cap A}$ est constante.
Montrer que f est constante : on pourra choisir $a_0 \in A$ et considérer la partie
$U = \{a \in A \ / \ f(a) = f(a_0)\}$.
Un tel résultat s'appelle un *passage du local au global*.

16°) Lorsque U est un ouvert de E, montrer que U est connexe si et seulement si U est connexe par arcs.

Partie IV : Une partie connexe mais non connexe par arcs

Dans toute cette partie, $E = \mathbb{R}^2$.
On pose $G = \{(x, \sin(\frac{\pi}{x})) \ / \ x \in]0,1]\}$, $V = \{0\} \times [-1,1]$ et $C = G \cup V$.
L'objectif de cette partie est de montrer que C est connexe sans être connexe par arcs.

17°) Montrer que G est connexe.

18°) Calculer $\overline{G}$ et en déduire que C est connexe.

19°) On suppose que C est connexe par arcs.
Montrer qu'il existe une application continue f de $[0,1]$ dans C telle que $f(0)=(0,0)$ et $f(1)=(1,0)$.
Pour tout $t\in[0,1]$, on pose $f(t)=(x(t),y(t))$. On note $F=\{t\in[0,1]\ /\ x(t)=0\}$.
Montrer que F possède un maximum, que l'on notera t_1 pour la suite.

20°) L'auteur de l'énoncé a demandé à une IA de finir le problème. Voici ce qu'elle a produit. Détecter l'erreur commise par l'IA et proposer une démonstration correcte.
"On reprend les hypothèses et notations de la question précédente.
Par construction, $x(1)=1\neq 0$, donc $t_1<1$. De plus, par définition de t_1, pour tout $t\in]t_1,1]$, $t\notin F$ donc $x(t)>0$, ce qui implique $f(t)\in G$ et $y(t)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x(t)}\right)$.

$\diamond$ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $u_n=\dfrac{2}{4n+1}$ et $v_n=\dfrac{2}{4n-1}$.
On remarque que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
$\sin\left(\dfrac{\pi}{u_n}\right)=\sin\left(\dfrac{(4n+1)\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=1$
et $\sin\left(\dfrac{\pi}{v_n}\right)=\sin\left(\dfrac{(4n-1)\pi}{2}\right)=\sin\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

$\diamond$ Comme $x(t_1)=0<u_n$ et $x(t_1+\frac{1}{n})>0$ pour tout n assez grand (de sorte que $t_1+\frac{1}{n}\leq 1$), le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à x sur $[t_1,t_1+\frac{1}{n}]$ fournit, dès que $u_n\leq x(t_1+\frac{1}{n})$, un réel $s_n\in\,]t_1,t_1+\frac{1}{n}]$ vérifiant $x(s_n)=u_n$, et de même un réel $s'_n\in\,]t_1,t_1+\frac{1}{n}]$ vérifiant $x(s'_n)=v_n$. Ces conditions sont réunies pour tout $n\geq n_0$, où n_0 est assez grand pour que $t_1+\frac{1}{n_0}\leq 1$ et $\max(u_{n_0},v_{n_0})\leq x(t_1+\frac{1}{n_0})$.

Comme $s_n,s'_n\in\,]t_1,t_1+\frac{1}{n}]$, on a $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$ et $s'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$. Par continuité de y

$$1=\lim_{n\to+\infty} y(s_n)=y(t_1) \qquad \text{et} \qquad -1=\lim_{n\to+\infty} y(s'_n)=y(t_1),$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, C n'est pas connexe par arcs."