DS 7 : un corrigé

Barème, sur un total de 67 points

- Exercices : 8 points : 2,2,4.
- Le problème : 59 points
  - Partie I, 11 points : 2,2,1,4,1,1.
  - Partie II, 21 points : 3,1+2,2+3,3,2,5.
  - Partie III, 10 points : 1,2,3,4.
  - Partie IV, 17 points : 1,3+3+1,2,2+5.

Exercices

Exercice 1 :

$\sigma = (1\ 3) \circ (2\ 4\ 5\ 6)$: on peut le vérifier en notant $s = (1\ 3) \circ (2\ 4\ 5\ 6)$ et en s'assurant que, pour tout $x \in \mathbb{N}_6$, $\sigma(x) = s(x)$.
$(1\ 3)$ et $(2\ 4\ 5\ 6)$ sont deux cycles à supports disjoints donc d'après l'énoncé, ils commutent. On en déduit que $\sigma^2 = (1\ 3)^2 \circ (2\ 4\ 5\ 6)^2 = (2\ 5) \circ (4\ 6) \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_6}$,
$\sigma^3 = (1\ 3)^3 \circ (2\ 4\ 5\ 6)^3 = (1\ 3) \circ (6\ 5\ 4\ 2) \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_6}$ et $\sigma^4 = (1\ 3)^4 \circ (2\ 4\ 5\ 6)^4 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_6}$,
donc $\boxed{\text{l'ordre de } \sigma \text{ vaut } 4}$.

Exercice 2 :

On vérifie que $\overline{1}$ est solution de (E). Soit $x \in \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.
On calcule que $(x - \overline{1})(x - \overline{13}) = x^2 - \overline{14}x + \overline{13} = x^2 + 5x + \overline{13}$,
donc $(E) \iff (x - \overline{1})(x - \overline{13}) = 0$, or 19 est un nombre premier, donc $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ est un corps. Il est en particulier intègre, donc $(E) \iff x \in \{\overline{1}, \overline{13}\}$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ est égal à } \{\overline{1}, \overline{13}\}}$.

Exercice 3 :

Lorsque n tend vers $+\infty$, d'après les croissances comparées, $n - \ln^3 n \sim n \neq 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $n - \ln^3 n \neq 0$. Ainsi, $\sum_{n \geq n_0} a_n$ est bien une série correctement définie.

De plus, $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$, donc $|a_n| \sim \dfrac{1}{n}$, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ n'est pas absolument convergente.
Soit $n \geq n_0$. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \dfrac{1}{1-\frac{\ln^3 n}{n}}$, or $\dfrac{\ln^3 n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
donc $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \times \Big(1+\dfrac{\ln^3 n}{n}+o\Big(\dfrac{\ln^3 n}{n}\Big)\Big) = \dfrac{(-1)^n}{n}+u_n$, où $u_n = (-1)^n\dfrac{\ln^3 n}{n^2}+o\Big(\dfrac{\ln^3 n}{n^2}\Big)$.
La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.
$|u_n| \sim \dfrac{\ln^3 n}{n^2} = o\Big(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$, toujours d'après les croissances comparées, or $\frac{3}{2} > 1$ donc $\sum u_n$ est absolument convergente. On en déduit que $\dfrac{(-1)^n}{n} + u_n$ est le terme général d'une série convergente, donc $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n \text{ est semi-convergente}}$.

Problème : Connexité

Partie I : Connexité par arcs

1°) Soit $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Notons $B_o(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r et montrons qu'elle est convexe.
Soient $(x,y) \in B_o(a,r)^2$ et $t \in [0,1]$.
$d(a, tx+(1-t)y) = \|tx+(1-t)y-(ta+(1-t)a)\|$, donc par inégalité triangulaire, $d(a,tx+(1-t)y) \leq t\|x-a\|+(1-t)\|y-a\|$, donc $d(a,tx+(1-t)y) \leq tr+(1-t)r = r$.
De plus, supposons que $d(a,tx+(1-t)y) = r$. Alors, toutes les inégalités précédentes sont des égalités, donc $t(r-\|x-a\|)+(1-t)(r-\|y-a\|) = 0$. Il s'agit de la somme de deux réels positifs. Cette somme est nulle, donc les deux réels sont nuls. or $r-\|x-a\|$ et $r-\|y-a\|$ sont non nuls, donc $t = 0 = 1-t$ ce qui est impossible.
Ainsi, $d(a,tx+(1-t)y) < r$.
On a prouvé que $[x,y] \subset B_o(a,r)$, pour tout $x,y \in B_o(a,r)$, donc $B_o(a,r)$ est une partie convexe de E.

2°) Soit $c,d \in [a,b]$. il existe $u,v \in [0,1]$ tels que $c = (1-u)a+ub$ et $d = (1-v)a+vb$.
Soit $t \in [0,1]$. Alors $(1-t)c+td = [(1-t)(1-u)+t(1-v)]a+[(1-t)u+tv]b$.
Posons $\alpha = (1-t)u+tv$. Clairement, $0 \leq \alpha \leq (1-t)+t = 1$, donc $\alpha \in [0,1]$. De plus,
$$\begin{aligned}(1-t)(1-u)+t(1-v) &= 1+tu-t-u+t-tv\\ &= 1+tu-u-tv\\ &= 1+u(t-1)-tv\\ &= 1-\alpha,\end{aligned}$$
donc $(1-t)c+td = (1-\alpha)a+\alpha b \in [a,b]$.

Ceci prouve que $[c, d] \subset [a, b]$, donc $[a, b]$ est convexe.

3°) Soit A une partie convexe de E. Soit $M, N \in A$. Posons $f(t) = (1-t)M + tN$ pour tout $t \in [0, 1]$. Alors f est un chemin continu d'extrémités M et N à support dans A car A est convexe. Ainsi, A est connexe par arcs.

4°) Posons $A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Soit $(x, z) \in A^2$. On sait qu'il existe un point y dans $\bigcap_{i \in I} A_i$.

Il existe $(j, k) \in I^2$ tel que $x \in A_j$ et $z \in A_k$. $(x, y) \in A_j^2$ et A_j est connexe par arcs, donc il existe $f : [0, 1] \longrightarrow A_j$ continue et telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$. De même, il existe $g : [0, 1] \longrightarrow A_k$ continue et telle que $g(0) = y$ et $g(1) = z$.
L'idée est de construire le chemin h en raccordant les chemins f et g, mais il faut parcourir le support de f entre 0 et $\frac{1}{2}$, puis celui de g entre $\frac{1}{2}$ et 1.
Si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, posons $h(t) = f(2t)$ et si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, posons $h(t) = g(2t-1)$. C'est cohérent en $t = \frac{1}{2}$ car $f(1) = g(0)$. On définit ainsi une application h de $[0, 1]$ dans A telle que $h(0) = f(0) = x$ et $h(1) = g(1) = z$. De plus, h est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ (donc en particulier h est continue à gauche en $\frac{1}{2}$) et sur $[\frac{1}{2}, 1]$ (donc en particulier h est continue à droite en $\frac{1}{2}$), donc h est continue sur $[0, 1]$.
Ainsi A est connexe par arcs.

5°) Supposons que A est étoilée par rapport à a. Alors, par double inclusion, on montre que $A = \bigcup_{x \in A} [a, x]$. Or pour tout $x \in A$, $[a, x]$ est convexe d'après la question 2, donc est connexe par arcs, et $a \in \bigcap_{x \in A} [a, x]$, donc $\bigcap_{x \in A} [a, x] \neq \emptyset$. Ainsi, d'après la question précédente, A est connexe par arcs.

6°) Soit $(x, y) \in f(A)^2$. Il existe $(a, b) \in A^2$ tel que $x = f(a)$ et $y = f(b)$.
A étant connexe par arcs, il existe $g : [0, 1] \to A$ continue telle que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. Alors $h = f \circ g$ est une application de $[0, 1]$ dans $f(A)$, continue, et telle que $h(0) = x$ et $h(1) = y$. Ainsi, $f(A)$ est connexe par arcs.

Partie II : Connexité

7°) Soit $(x, y) \in E^2$. Soit $a \in A$. $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$,
donc $d(x, A) - d(x, y)$ est un minorant de $\{d(y, a)/a \in A\}$.
Or le plus grand des minorants de $\{d(y, a)/a \in A\}$ est sa borne inférieure, c'est-à-dire $d(y, A)$. Ainsi $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$. Par la suite, un tel argument sera appelé un passage à la borne inférieure.
Donc $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$.
En intervertissant les rôles joués par x et y, on obtient que $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, donc $|d(x, A) - d(y, A)| = \max(d(x, A) - d(y, A), d(y, A) - d(x, A)) \leq d(x, y)$.
Ceci prouve que f est 1-lipschitzienne, donc elle est continue.

8°) $\diamond$ Par définition, $U = d(., A)^{-1}(]-\infty, \alpha[$, or $d(., A)$ est continue d'après la question précédente et $]-\infty, \alpha[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc U est un ouvert de E. De même pour V. Il est clair de plus que $U \cap V = \emptyset$, donc U et V sont bien deux ouverts disjoints.
$\diamond$ On a clairement $A \subset U$ et si $x \in B$, pour tout $a \in A$, $d(x, a) \geq d(A, B)$, donc par passage à la borne inférieure, $d(x, A) \geq d(A, B)$, or $d(A, B) > 0$, donc $d(x, A) > \alpha$ ce qui prouve que $x \in V$. Ainsi $A \subset U$ et $B \subset V$.
On en déduit que $(B \cap U) \subset (V \cap U) = \emptyset$, donc $A = (A \cup B) \cap U$ est un ouvert de $A \cup B$. De même, $(A \cup B) \setminus A = B$ est un ouvert de $A \cup B$, donc A est également un fermé de $A \cup B$. De plus A est non vide et différent de $A \cup B$ (car B est non vide), donc $A \cup B$ n'est pas connexe.

9°) $\diamond$ Supposons que A est connexe et soit f une application continue de A dans $\{0, 1\}$. $\{0\} = \{0, 1\} \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[= \{0, 1\} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc $\{0\}$ est un ouvert-fermé de $\{0, 1\}$. Or f est continue, donc $f^{-1}(\{0\})$ est un ouvert-fermé pour la topologie relative de A. A étant connexe, $f^{-1}(\{0\})$ est soit vide, soit égal à A, donc f est ou bien constamment égale à 1, ou bien constamment égale à 0.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que les seules applications continues de A dans $\{0, 1\}$ sont les deux applications constantes. Soit U une partie de A, que l'on suppose ouverte et fermée pour la topologie relative de A.
Pour tout $x \in A$, on pose $f(x) = 1$ lorsque $x \in U$ et $f(x) = 0$ sinon. Ainsi f est la fonction caractéristique de U dans A.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

— si $V \cap \{0, 1\} = \emptyset$ alors $f^{-1}(V) = \emptyset$,
— si $V \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$ alors $f^{-1}(V) = A$,
— si $V \cap \{0, 1\} = \{1\}$ alors $f^{-1}(V) = U$,
— si $V \cap \{0, 1\} = \{0\}$ alors $f^{-1}(V) = A \setminus U$.

Ainsi, dans tous les cas, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de A.
Alors, d'après le cours, f est une application continue. D'après notre hypothèse, f est constante, égale à 0 ou 1, donc $U = \emptyset$ ou $U = A$, ce qui prouve que A est connexe.

10°) $\diamond$ Supposons que A est connexe par arcs. Soit f une application continue de A dans $\{0, 1\}$. On peut voir f comme une application continue de A dans $\mathbb{R}$, donc d'après la question 6, $f(A)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$.
Supposons que f n'est pas constante. Alors $f(A) = \{0, 1\}$, donc $\{0, 1\}$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Il existe ainsi une application $g \ : \ [0, 1] \to \{0, 1\}$, continue et telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. Mezalor d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $g(t) = \frac{1}{2}$ ce qui est faux. Ainsi f est constante.
D'après la question précédente, A est connexe.
$\diamond$ En question 8, on a montré que $A \cup B$ n'est pas connexe. Alors, d'après la contraposée du point précédent, $A \cup B$ n'est pas connexe par arcs.

11°) D'après les questions 3 et 10, on sait déjà que si I est un intervalle, alors I est connexe par arcs et que si I est connexe par arcs, alors il est connexe. Il reste donc à montrer que si I est connexe, alors I est un intervalle. On démontre la contraposée : Supposons que I n'est pas convexe. Il existe $x, y \in I$ et $z \in [x, y]$ tel que $z \notin I$.

Alors $J = I \cap]-\infty, z[= I \cap]-\infty, z]$ est un ouvert-fermé de I, non vide et différent de I, car $x \in J$ et $y \notin J$. Ainsi I n'est pas connexe.

12°) Supposons qu'il existe une application $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ continue et injective.
$\diamond$ $[0,1]^2$ est convexe (c'est un carré), donc il est connexe par arcs, et f est continue, donc $f([0,1]^2)$ est un connexe par arc de $\mathbb{R}$, donc c'est un intervalle.
$[0,1]^2$ n'est pas un singleton et f est injective, donc $f([0,1]^2)$ est un intervalle non réduit à un point.
De plus $[0,1]^2$ est compact et f est continue, donc d'après le cours, $f([0,1]^2)$ est compact. Ainsi, il existe $a, b \in [0,1]$ avec $0 \leq a < b \leq 1$ tel que $f([0,1]^2) = [a, b]$.
$\diamond$ Notons A l'unique antécédent de $\dfrac{a+b}{2}$. Si nous montrons que $[0,1]^2 \setminus \{A\}$ est connexe par arcs, f étant continue, $f([0,1]^2 \setminus \{A\}) = [a, \dfrac{a+b}{2}[\cup] \dfrac{a+b}{2}, b]$ est un intervalle, ce qui est faux. Ceci prouve alors qu'une telle application f n'existe pas.
$\diamond$ Il reste donc à montrer que $[0,1]^2 \setminus \{A\}$ est connexe par arcs.
Soient B et C deux points de $[0,1]^2 \setminus \{A\}$.
$\diamond$ Premier cas. On suppose que $A \notin [B, C]$. Alors l'application
$h : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1]^2 \setminus \{A\} \\ t & \longmapsto & (1-t)B + tC \end{array}$ est continue, $h(0) = B$ et $h(1) = C$.
$\diamond$ Second cas. On suppose que $A \in [B, C]$.
On sait de plus que $B \neq A$ et $C \neq A$. Ceci impose également $B \neq C$.
Ainsi, les trois points A, B et C sont distincts et alignés.
Choisissons dans $[0,1]^2$ un point D hors de la droite $(AB) = (AC)$.
Pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, posons $h(t) = (1-2t)B + 2tD$: $A \notin [B, D]$ (sinon, $D \in (AB)$), donc $h(t) \in [0,1]^2 \setminus \{A\}$.
Pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, posons $h(t) = 2(1-t)D + (2t-1)C$: $A \notin [D, C]$, donc $h(t) \in [0,1]^2 \setminus \{A\}$.
Comme en question 4, on montre que h est continue. De plus $h(0) = B$ et $h(1) = C$.
Ainsi, pour tout $B, C \in [0,1]^2 \setminus \{A\}$, on peut relier B à C par un chemin continu à valeurs dans $[0,1]^2 \setminus \{A\}$. Ceci prouve que $[0,1]^2 \setminus \{A\}$ est connexe par arcs, ce qui conclut.

Partie III : Propriétés de la connexité

13°) Soit g une application continue de $f(A)$ dans $\{0,1\}$. Alors $g \circ f$ est une application continue de A dans $\{0,1\}$. A est connexe, donc d'après la question 9, $g \circ f$ est une application constante. Notons $c \in \{0,1\}$ cette constante.
Soit $x \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$, donc $g(x) = (g \circ f)(a) = c$. Ainsi, g est une application constante. Toujours d'après la question 9, ceci prouve que $f(A)$ est connexe.

14°) Soit f une application continue de A' dans $\{0,1\}$. A est connexe et $f|_A$ est une application continue de A dans $\{0,1\}$, donc il existe $c \in \{0,1\}$ tel que, pour tout $a \in A$, $f(a) = c$.

Soit $a' \in A'$. Alors $a' \in \overline{A}$, donc il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a'$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c = f(a_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a')$ par continuité de f, donc $f(a') = c$. Ainsi f est une application constante, ce qui prouve que A' est connexe.

15°) $\diamond$ A est non vide, donc il existe $a_0 \in A$. Notons $U = \{a \in A \ / \ f(a) = f(a_0)\}$. Si l'on montre que U est un ouvert-fermé relatif de A, alors d'après l'hypothèse de connexité de A, U est soit vide, soit égal à A, mais $a_0 \in U$, donc $U = A$, ce qui prouve que pour tout $a \in A$, $f(a) = f(a_0)$. Alors f est constante. Il suffit donc d'établir que U est un ouvert-fermé relatif de A.
$\diamond$ Soit $a \in A$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{V\cap A}$ est constante. Alors $f|_{V\cap A}$ est continue en a , or la notion de continuité en a est locale en a, donc f est continue en a, pour tout $a \in A$. Ainsi, f est globalement continue.
Alors $U = f^{-1}(\{f(a_0)\})$ est un fermé relatif de A, car $\{f(a_0)\}$ est fermé en tant que singleton.
$\diamond$ Soit $a \in U$. Il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f|_{V\cap A}$ est constante, donc pour tout $x \in V\cap A$, $f(x) = f(a_0)$. Ainsi, $(V \cap A) \subset U$. Or $V \cap A$ est d'après le cours un voisinage de a au sens de la topologie relative à A, donc U un voisinage de a pour la topologie de A. Ceci est vrai pour tout $a \in U$, donc U est un ouvert relatif de A, ce qui conclut.

16°) On sait déjà que si U est connexe par arcs, alors U est connexe.
Supposons que U est un ouvert connexe. Soit $a \in U$.
Notons V l'ensemble des $b \in U$ tels qu'il existe un chemin continu d'extrémités a et b et dont le support est inclus dans U.
$\diamond$ Soit $b \in V$. $b \in U$ et U est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que $B_o(b,r) \subset U$.
Soit $c \in B_o(b,r)$. $b \in V$, donc il existe $f \ : \ [0,1] \longrightarrow U$, avec f continue, tel que $f(0) = a$ et $f(1) = b$.
Pour tout $t \in [0,1]$, posons $g(t) = (1-t)b + tc$. D'après la question 1, g est une application continue de $[0,1]$ dans $B_o(b,r)$, donc à valeurs dans U.
Comme en question 4, si $t \in [0, \frac{1}{2}]$, posons $h(t) = f(2t)$ et si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$,
posons $h(t) = g(2t-1)$. Alors h est une application continue de $[0,1]$ dans U telle que $h(0) = f(0) = a$ et $h(1) = g(1) = c$. Ceci prouve que $c \in V$, pour tout $c \in B_o(b,r)$, donc $B_o(b,r) \subset V$. Ainsi, $(B_o(b,r) \cap U) \subset V$, or $B_o(b,r) \cap U$ est la boule ouverte pour la topologie relative à U, de centre b et de rayon $r > 0$, donc V est un voisinage de b pour la topologie de U. C'est vrai pour tout $b \in V$, donc V est un ouvert relatif de U.
$\diamond$ Soit $b \in U \setminus V$. Il existe à nouveau $r > 0$ tel que $B_o(b,r) \subset U$.
Soit $c \in B_o(b,r)$. Supposons que $c \in V$. Alors il existe un chemin continu f d'extrémités a et c à valeurs dans U. Mais en posant $g(t) = (1-t)c + tb$, on construit à nouveau un chemin continu g d'extrémités c et b à valeurs dans U. Comme lors du point précédent, on peut alors construire un chemin continu h d'extrémités a et b à valeurs dans U. Mais ceci prouve que $b \in V$, ce qui est faux, donc $c \notin V$, pour tout $c \in B_o(b,r)$. Ainsi, $B_o(b,r) \subset U \setminus V$. On en déduit que $U \setminus V$ est un ouvert de U, donc que V est un fermé de U.
$\diamond$ V est un ouvert-fermé de U, non vide car il contient a, or U est connexe, donc $V = U$, ce qui prouve que, pour tout $a \in U$, pour tout $b \in U$, il existe un chemin

continu d'extrémités a et b et dont le support est inclus dans U. Ainsi, U est connexe par arcs.

Partie IV : Une partie connexe mais non connexe par arcs

17°) L'application $\begin{array}{rccc} f : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x, \sin(\frac{\pi}{x})) \end{array}$ est continue d'après les théorèmes usuels, or $]0,1]$ est convexe, donc connexe par arcs. Alors, d'après la question 6,
$G = f(]0,1])$ est un connexe par arcs.

18°) Montrons que $C = \overline{G}$:
G étant connexe, d'après la question 14, on pourra conclure que C est aussi connexe.
$\diamond$ Soit $(x,y) \in \overline{G}$. D'après le cours, il existe $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in G^{\mathbb{N}}$ tel que $(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x,y)$, c'est-à-dire tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in]0,1]$ et $y_n = \sin(\frac{\pi}{x_n})$.
Premier cas : si $x \in]0,1]$, par continuité de $t \longmapsto \frac{1}{t}$ et de sin, $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, donc par unicité de la limite, $y = \sin(\frac{\pi}{x})$, donc $(x,y) \in G$. En particulier, $(x,y) \in C$.
Second cas : on suppose que $x = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in [-1,1]$ et $[-1,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc d'après le cours, $y \in [-1,1]$. Ainsi, $(x,y) \in V$. En particulier, $(x,y) \in C$.
On a donc montré que $\overline{G} \subset C$.
$\diamond$ Soit $(x,y) \in V$. Ainsi, $x = 0$ et $y \in [-1,1]$. Posons $\alpha = \arcsin(y) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Soit $x' \in]0,1]$. $\sin(\frac{\pi}{x'}) = y \Leftarrow \sin(\frac{\pi}{x'}) = \sin\alpha \Leftarrow \frac{\pi}{x'} \equiv \alpha[2\pi] \Leftarrow [\exists n \in \mathbb{N},\ \frac{\pi}{x'} = \alpha + 2n\pi]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\alpha + 2n\pi \geq -\frac{\pi}{2} + 2\pi > 0$. On peut donc poser $x_n = \dfrac{\pi}{\alpha + 2n\pi}$. Il est clair que $x_n \in]0,1]$ et ce qui précède montre que $\sin(\frac{\pi}{x_n}) = y$.
Ainsi, $(x_n, \sin(\frac{\pi}{x_n})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,y)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_n, \sin(\frac{\pi}{x_n})) \in G$, donc $(0,y) \in \overline{G}$.
Ceci démontre que $V \subset \overline{G}$.
De plus, d'après le cours, $G \subset \overline{G}$, donc $C = (G \cup V) \subset \overline{G}$.
En conclusion, on a bien montré que $C = \overline{G}$ est connexe.

19°) $\diamond$ $(0,0) \in V \subset C$, de plus, lorsque $t = 1$, $\sin(\frac{\pi}{t}) = 0$, donc $(1,0) \in G \subset C$. Or C est supposé connexe par arcs, donc il existe bien un chemin continu $f : [0,1] \longrightarrow C$ vérifiant $f(0) = (0,0)$ et $f(1) = (1,0)$.
$\diamond$ $x(0) = 0$, donc F est non vide. De plus F est majoré par 1, donc il possède une borne supérieure. On peut donc poser $t_1 = \sup(F)$. Il reste à montrer que t_1 est un maximum, c'est-à-dire que $t_1 \in F$.
D'après le cours, il existe $(f_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x(f_n) = 0$. De plus, f étant continue, d'après le cours, x et y sont aussi continues. En particulier, $x(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x(t_1)$, donc par unicité de la limite, $x(t_1) = 0$.
Ceci prouve que $t_1 \in F$ et conclut.

20°) $\diamond$ Il n'y a aucune raison que, pour n assez grand (ce qui au passage est mal rédigé), on ait $u_n \leq x(t_1 + \frac{1}{n})$. On sait seulement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que, par continuité

de x, $x(t_1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x(t_1) = 0$, mais a priori, il est possible que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > x(t_1 + \frac{1}{n})$. La démonstration proposée par l'IA est donc fausse.
$\diamond$ Voici une démonstration correcte, qui s'inspire de celle proposée par l'IA.
On reprend les hypothèses et notations de la question précédente.
Par construction, $x(1) = 1 \neq 0$, donc $t_1 < 1$. De plus, par définition de t_1, pour tout $t \in]t_1, 1]$, $t \notin F$ donc $x(t) > 0$, ce qui implique $f(t) \in G$ et $y(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{x(t)}\right)$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{2}{4n+1}$ et $v_n = \dfrac{2}{4n-1}$.
On remarque que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
$\sin\left(\dfrac{\pi}{u_n}\right) = \sin\left(\dfrac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
et $\sin\left(\dfrac{\pi}{v_n}\right) = \sin\left(\dfrac{(4n-1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de l'application x, $x(t) \underset{\substack{t\to t_1\\ t>t_1}}{\longrightarrow} x(t_1) = 0$, donc il existe $\varepsilon_n > 0$ tel que $t_1 + \varepsilon_n \leq 1$ et $x(t_1 + \varepsilon_n) < u_n$. De plus, $u_n < v_n < 1 = x(1)$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $s_n, s'_n \in]t_1 + \varepsilon_n, 1[$ tel que $x(s_n) = u_n$ et $x(s'_n) = v_n$. Alors $y(s_n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{u_n}\right) = 1$ et $y(s'_n) = -1$.
$\diamond$ Montrons que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$.
Soit ℓ une valeur d'adhérence de (s_n).
Il existe une application φ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $s_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Alors $\ell \in [t_1, 1]$ et, par continuité de x, $x(s_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x(\ell)$. Or $x(s_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car par récurrence sur n, on montre que $\varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi, par unicité de la limite, $x(\ell) = 0$. Or $\ell \in [t_1, 1]$, donc $\ell = t_1$.
Ceci prouve que la suite (s_n) est une suite bornée admettant t_1 pour unique valeur d'adhérence. D'après le cours, $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$.
$\diamond$ De même, on montre que $s'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t_1$.
Par continuité de l'application y, $y(s_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y(t_1)$, or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y(s_n) = 1$, donc par unicité de la limite, $y(t_1) = 1$.
Mais on a aussi $y(s'_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y(t_1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y(s'_n) = -1$, donc $y(t_1) = -1$.
C'est contradictoire, donc $\boxed{C \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.