Feuille d'exercices 17.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 17.8 :
Pour n suffisamment grand, $2n^2+an+1>0$, donc $\sum a_n$ est définie, quitte à la tronquer à un ordre convenable.
$a_n = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi n^2}{2n^2+an+1}) = \sin(\frac{an\pi+\pi}{4n^2+2an+2})$,
donc $a_n = \sin(\frac{\pi}{4n}\frac{a+\frac{1}{n}}{1+\frac{a}{2n}+\frac{1}{2n^2}}) = \sin(\frac{\pi}{4n}(a+\mathbf{O}(\frac{1}{n})))$,
donc $a_n = \frac{a\pi}{4n} + \mathbf{O}(\frac{1}{n^2})$.
Si $a \neq 0$, $\sum a_n$ diverge, car $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, et si $a=0$, $\sum a_n$ converge.

Exercice 17.14 :
$u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
[Ici, les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'ont pas nécessairement la même nature, car elles ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang. Cependant, cet équivalent n'est pas complètement inutile.]
On en déduit que $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Elle est divergente ou semi-convergente.
[l'équivalent précédent ne permet pas de conclure. On recherche donc une information asymptotique plus fine.]

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})} \\ &= (-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{n})\right)\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right). \end{aligned}$$

ainsi $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
$-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n}$, donc $\sum(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))$ est divergente. D'autre part, d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, donc $\sum u_n$ est une série divergente.

Exercice 17.22 :

On pose $t = 1 - x$, de sorte que t tend vers 0 lorsque x tend vers 1. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - t + \sqrt{1-t}} \\ &= (1 - t + (1 - \tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\tfrac{t^2}{2} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 - \tfrac{3t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4} - \tfrac{t^2}{16} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4}(1 + \tfrac{t}{12} + o(t))\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}.\tfrac{9t^2}{16}(1 + o(1))) \\ &= \sqrt{2} - \tfrac{3\sqrt{2}}{8}t - \sqrt{2}\tfrac{t^2}{16}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{8}) + o(t^2), \end{aligned}$$

donc $f(x) = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Exercice 17.24 :

Premier cas. On suppose que $\alpha \leq 0$.

$\ln(n) + (-1)^n n^\alpha \sim \ln(n)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$,

$\ln(n) + (-1)^n n^\alpha \neq 0$. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n \geq N} u_n$ est définie.

De plus, $u_n \sim \dfrac{1}{\ln(n)}$. [$\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n)}$ est une série de Bertrand.]

$\dfrac{1}{\sqrt{n}} = o(\dfrac{1}{\ln(n)})$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, donc $\sum u_n$ est divergente.

Deuxième cas. On suppose que $\alpha > 0$.

$\ln(n) + (-1)^n n^\alpha \sim (-1)^n n^\alpha$, donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$,

$\ln(n) + (-1)^n n^\alpha \neq 0$. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq M} u_n$ est définie.

De plus, $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
- Supposons que $\alpha \in]0, 1]$.

[Ici, les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ n'ont pas nécessairement la même nature, car elles ne sont pas de signe constant à partir d'un certain rang. Cependant, cet équivalent n'est pas complètement inutile.]

On en déduit que $|u_n| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Elle est divergente ou semi-convergente.

[l'équivalent précédent ne permet pas de conclure. On recherche donc une information asymptotique plus fine.]

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \dfrac{1}{1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}$, or $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big(1 - (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} + o(\dfrac{ln(n)}{n^\alpha})\Big) = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(\dfrac{ln(n)}{n^{2\alpha}})$.

◇ Supposons que $2\alpha > 1$.

Il existe $\gamma \in]1, 2\alpha[$. $\dfrac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(\dfrac{ln(n)}{n^{2\alpha}}) \sim \dfrac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} = o(\dfrac{1}{n^\gamma})$,

donc $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(\dfrac{ln(n)}{n^{2\alpha}})$ est convergente.

De plus, d'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge, donc la série $\sum u_n$ est semi-convergente.
$\diamond$ Supposons que $2\alpha \leq 1$.
Alors, pour tout $n \geq 3$, $\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(\frac{ln(n)}{n^{2\alpha}}) \sim \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} \geq \frac{1}{n}$,
donc $\sum \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o(\frac{ln(n)}{n^{2\alpha}})$ diverge. On en déduit dans ce cas que $\sum u_n$ est divergente.
En résumé, $\sum u_n$ diverge lorsque $\alpha \leq \frac{1}{2}$, elle est semi-convergente pour $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ et elle est absolument convergente lorsque $\alpha > 1$.

Exercice 17.25 :
$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = exp((1+\frac{1}{n})\ln(n+1))$,
or $\ln(n+1) = \ln(n(1+\frac{1}{n})) = \ln(n) + ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(n) + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, donc
$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = exp\Big(\ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})\Big) = exp(\ln(n))\exp\Big(\frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})\Big)$.
Or $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n\Big(1 + \frac{ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})\Big) = n + \ln(n) + o(\ln(n))$.
De même, $(n+1)^{1-\frac{1}{n}} = exp\Big((1-\frac{1}{n})(\ln(n) + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\Big) = n\exp\Big(-\frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})\Big)$,
donc $(n+1)^{1-\frac{1}{n}} = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.
Ainsi, $a_n \sim \frac{2\ln(n)}{n^\alpha}$ [Il s'agit d'une série de Bertrand.]
$\diamond$ *P*remier cas. Supposons que $\alpha \leq 1$.
Alors, pour $n \geq 3$, $\frac{2\ln(n)}{n^\alpha} \geq \frac{2}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.
$\diamond$ *D*euxième cas. Supposons que $\alpha > 1$.
Il existe $\gamma \in]1, \alpha[$. $\frac{2\ln(n)}{n^\alpha} = o(\frac{1}{n^\gamma})$ donc $\sum a_n$ est convergente.

Exercice 17.28 :

1°) Pour tout $x > 0$, posons $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, donc f est croissante entre 0 et e puis décroissante entre e et $+\infty$ (représenter ceci en traçant le tableau de variations de f). De plus, lorsque x varie entre 0 et e, $f(x)$ varie de $-\infty$ à $\frac{1}{e}$, puis lorsque x varie de e à $+\infty$, $f(x)$ décroît de $\frac{1}{e}$ à 0.
f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $x \in]0, e[$ tel que $f(x) = -n$.

2°) f réalise une bijection continue strictement croissante de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}_-^*$, donc f^{-1} est également continue et strictement croissante et $x_n = f^{-1}(-n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème de la limite monotone.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $\ln(x_n) + nx_n = 0$, donc en ajoutant $\ln n$, on obtient que $\ln n = \ln(nx_n) + nx_n$, or $nx_n = -\ln x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par composition et d'après les croissances comparées, $\ln(nx_n) = o(nx_n)$.

Ainsi, $\ln n = \ln(nx_n) + nx_n \sim nx_n$, ce qui montre que $\boxed{x_n \sim \dfrac{\ln n}{n}}$.

Remarque : On peut poursuivre le développement asymptotique :

$x_n = -\dfrac{1}{n}\ln(x_n) = -\dfrac{1}{n}\ln(\dfrac{\ln n}{n} x_n \dfrac{n}{\ln n}) = -\dfrac{1}{n}(\ln(\ln n) - \ln n + o(1))$,

donc $x_n = \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.