

DM 43 : un corrigé

Partie I : Dérivabilité dans \mathbb{C} .

1°) D'après le cours, il s'agit de montrer que z_0 appartient à l'adhérence de $\Omega \setminus \{z_0\}$, c'est-à-dire que z_0 est un point d'accumulation de Ω .

Soit $V \in \mathcal{V}(z_0)$. Il existe $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(z_0, \varepsilon') \subset V$. De plus, Ω est un ouvert, donc il existe $\varepsilon'' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B_o(z_0, \varepsilon'') \subset \Omega$.

Posons $\varepsilon = \min(\varepsilon', \varepsilon'')$. Alors $\varepsilon > 0$ et $B_o(z_0, \varepsilon) \subset V \cap \Omega$. Ainsi, $V \cap (\Omega \setminus \{z_0\})$ contient $B_o(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, qui est non vide, ce qu'il fallait démontrer.

2°) \diamond Soit $t \in [0, 1]$. Posons $g(t) = f(tz_0 + (1-t)z_1)$. t étant réel, $g(t) = t\overline{z_0} + (1-t)\overline{z_1}$. Ainsi, g est une fonction polynomiale de t donc d'après le cours, g est dérivable et $\boxed{g'(t) = \overline{z_0} - \overline{z_1}}$.

\diamond Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, posons $g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0}$.

Ainsi, $z_0 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} z_0$ et $g(z_0 + \frac{1}{n}) = 1$, donc si $g(z) \xrightarrow[z \neq z_0]{z \rightarrow z_0} \ell \in \mathbb{C}$, alors $\ell = 1$.

De même, $z_0 + i\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{n \rightarrow +\infty} z_0$ et $g(z_0 + i\frac{1}{n}) = -1$, donc si $g(z) \xrightarrow[z \neq z_0]{z \rightarrow z_0} \ell \in \mathbb{C}$, alors $\ell = -1$.

Ainsi, la quantité $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ n'admet pas de limite lorsque z tend vers z_0 , donc f n'est pas dérivable en z_0 .

3°) Lorsque f est l'application identiquement nulle sur Ω , pour tout $z_0, z \in \Omega$ avec $z \neq z_0$, $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 0$, donc f est holomorphe sur Ω . Ainsi, $H(\Omega) \neq \emptyset$.

Soit $f, g \in H(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Alors

$$\frac{(\alpha f + g)(z) - (\alpha f + g)(z_0)}{z - z_0} = \alpha \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \in \Omega \setminus \{z_0\}]{z \rightarrow z_0} \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

Ceci prouve que $\alpha f + g \in H(\Omega)$ et que $(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$.

Ainsi, on a montré que $H(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^Ω , lequel est un \mathbb{C} -espace vectoriel d'après le cours. De plus, ce qui précède montre que l'application

$$\begin{array}{ccc} H(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{C}^\Omega \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \text{ est linéaire.}$$

4°) \diamond On dispose des équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est dérivable en } z_0 &\iff \exists \ell \in \mathbb{C}, \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}]{} \ell \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C}, \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \ell \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{=} o(1) \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C}, f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}}{=} (z - z_0)o(1) = o(z - z_0) \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\
&\quad |z - z_0| \leq \alpha \implies |f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \\
&\iff \exists \ell \in \mathbb{C}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall z \in \Omega, \\
&\quad |z - z_0| \leq \alpha \implies |f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|;
\end{aligned}$$

En effet, pour $z = z_0$, $|f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0)| = 0 \leq 0 = \varepsilon |z - z_0|$. Ainsi, f est dérivable en $z_0 \iff \exists \ell \in \mathbb{C}, f(z) - f(z_0) - \ell(z - z_0) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}}{=} o(z - z_0)$,

ce qui conclut.

\diamond Supposons que f est dérivable en z_0 . Alors

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}}{o} (z - z_0), \text{ or } z - z_0 \xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}]{} 0,$$

donc $z - z_0 = o(1)$. Alors $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)o(1) + o(o(1)) = f(z_0) + o(1)$, ce qui prouve que $f(z) \xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}]{} f(z_0)$, donc f est continue en z_0 .

$$\begin{aligned}
5^\circ) \quad \diamond \text{ Soit } f, g \in H(\Omega). \text{ Soit } z_0 \in \Omega. \text{ Pour } z \in \Omega \setminus \{z_0\}, \\
\frac{fg(z) - fg(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(f(z)g(z) - f(z_0)g(z)) + (f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0))}{z - z_0} \\
&= \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\
&\xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}]{} f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0),
\end{aligned}$$

d'après les théorèmes usuels sur les limites de fonctions et car g est continue en z_0 d'après la question précédente. Ceci prouve que fg est holomorphe sur Ω

et que $\boxed{(fg)' = f'g + fg'}$.

\diamond On suppose que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z) \neq 0$. Soit $z_0 \in \Omega$.

$$\frac{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}}{z - z_0} = \frac{g(z_0) - g(z)}{z - z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \xrightarrow[\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega \setminus \{z_0\}}]{} -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}, \text{ à nouveau car } g \text{ est continue en } z_0.$$

Ceci prouve que $\frac{1}{g}$ est holomorphe sur Ω et que $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

\diamond En combinant les deux propriétés précédentes, on en déduit que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g} \in H(\Omega)$

et que $\left(\frac{f}{g}\right)' = f' \frac{1}{g} + f \left(-\frac{g'}{g^2}\right)$, donc $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$.

6°) \diamond Soit $f \in H(\Omega)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $f^n \in H(\Omega)$ et $(f^n)' = n f' f^{n-1}$.

Pour $n = 1$, $R(1)$ est évidente.

Supposons $R(n)$. Alors $f^{n+1} = f \times f^n$, donc d'après la question précédente, et l'hypothèse de récurrence, $f^{n+1} \in H(\Omega)$ et $(f^{n+1})' = f' \times f^n + f \times (f^n)' = (n+1)f'f^n$, ce qui prouve $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n \in H(\Omega)$ et que $(f^n)' = n f' f^{n-1}$.

◇ En revenant à la définition, il est évident que $z \mapsto z$ est holomorphe sur \mathbb{C} et que $\frac{d(z)}{dz} = 1$. Alors, d'après la propriété précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z \mapsto z^n$ est

holomorphe sur \mathbb{C} et $\frac{d(z^n)}{dz} = n z^{n-1}$.

◇ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Posons $P(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n X^n$, où (p_n) est une suite presque nulle de complexes. D'après la question 3, $\frac{d(P(z))}{dz} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} n p_n z^{n-1}$, donc $P \in H(\Omega)$ et P' est

encore une application polynomiale. Alors, par récurrence, on en déduit que P est k fois dérivable, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve, avec la question 4, que P est une application de classe C^∞ sur \mathbb{C} .

◇ D'après le cours, $R(Q)$ est une partie finie de \mathbb{C} , donc c'est un fermé de \mathbb{C} . Ainsi, $\mathbb{C} \setminus R(Q)$ est bien un ouvert de \mathbb{C} .

D'après la question précédente et ce qui précède, $\frac{P}{Q} \in H(\mathbb{C} \setminus R(Q))$ et

$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{PQ' - P'Q}{Q^2}$. Cette dernière expression est encore de la forme $\frac{P_1}{Q_1}$,

où $P_1, Q_1 \in \mathbb{C}[X]$ avec $R(Q_1) = R(Q)$. Ainsi, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on montre que $\frac{P}{Q}$ est k fois dérivable sur $\mathbb{C} \setminus R(Q)$ et que $\left(\frac{P}{Q}\right)^{(k)}$ est de la forme $\frac{P_k}{Q_k}$ où $P_k, Q_k \in \mathbb{C}[X]$

avec $R(Q_k) = R(Q)$. Ceci prouve que $\frac{P}{Q}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{C} \setminus R(Q)$.

7°) D'après l'énoncé, $g \circ f$ est définie sur l'ouvert Ω .

Soit $z_0 \in \Omega$. g est dérivable en $f(z_0)$,

donc $g(u) \underset{\substack{u \rightarrow f(z_0) \\ u \in U}}{=} g(f(z_0)) + g'(f(z_0))(u - f(z_0)) + o(u - f(z_0))$

Or $f(z) \underset{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega}}{=} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \xrightarrow{z \rightarrow z_0, z \in \Omega} f(z_0)$ et pour tout $z \in \Omega$, $f(z) \in U$,

donc le théorème de changement de variable pour la relation "o",

on peut poser $u = f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$ dans la première égalité : $g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))[f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)] + o(f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0))$.

Or $g'(f(z_0))o(z - z_0) = o(z - z_0)$

et $o(f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)) = o(O(z - z_0) + o(z - z_0)) = o(O(z - z_0)) = o(z - z_0)$,

donc $g(f(z)) = g(f(z_0)) + g'(f(z_0))f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$. Ceci prouve que $g \circ f$ est dérivable en z_0 et que $\boxed{(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(f(z_0))}$.

Partie II : Dérivabilité des séries entières.

8°) D'après la question 6, $z \mapsto z^n$ est dérivable en z_0 et $\left(\frac{d(z^n)}{dz}\right)(z_0) = nz_0^{n-1}$. Cela signifie que $g(z) = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \xrightarrow[z \neq z_0]{z \rightarrow z_0} nz_0^{n-1} = g(z_0)$, donc g est continue en z_0 . De plus, d'après les théorèmes usuels g est continue en tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, donc g est bien continue sur \mathbb{C} .

9°) Soit $z \in B_f(z_0, r)$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule de Bernoulli,

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k}, \text{ puis par inégalité triangulaire,}$$

$$|z^n - z_0^n| \leq |z - z_0| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |z_0|^{n-1-k}.$$

D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, $|z| - |z_0| \leq |z - z_0| < r$, car $z \in B_o(z_0, r)$, donc $|z| \leq |z_0| + r$. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $|z|^k |z_0|^{n-1-k} \leq (|z_0| + r)^k |z_0|^{n-1-k} \leq (|z_0| + r)^k (|z_0| + r)^{n-1-k} = (|z_0| + r)^{n-1}$. On en déduit que $|z^n - z_0^n| \leq n|z - z_0|(|z_0| + r)^{n-1}$.

10°) Soit $z \in \mathbb{C}$.

◇ $\sum z^n$ est une série géométrique, donc d'après le cours, lorsque $|z| < 1$, $\sum z^n$ converge absolument, et lorsque $|z| > 1$, $|z^n| = |z|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi le rayon de convergence de $\sum z^n$ est égal à 1.

◇ D'après le cours, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme e^z ,

donc le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est égal à $+\infty$.

◇ $\frac{z^n}{2^n + n^2} \sim \left(\frac{z}{2}\right)^n$ d'après les croissances comparées, donc d'après le premier exemple,

lorsque $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, $\sum \frac{z^n}{2^n + n^2}$ est absolument convergente, et lorsque $\left|\frac{z}{2}\right| > 1$,

$\left|\frac{z^n}{2^n + n^2}\right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{2^n + n^2}$ est égal à 2.

11°) Notons R le rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

◇ Supposons que $|z| > R$. Alors $z \neq 0$ et

$|(n+1)a_{n+1}z^n| \geq |a_{n+1}z^n| = \frac{1}{|z|} |a_{n+1}z^{n+1}|$, or $|z| > R$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée. Alors la suite $(|a_{n+1}z^{n+1}|)$ n'est pas majorée, donc la suite $((n+1)a_{n+1}z^n)$ n'est pas bornée.

◇ Supposons maintenant que $|z| < R$. Si $z = 0$, $\sum a_n z^n$ est presque nulle donc est absolument convergente. On peut donc supposer que $z \neq 0$.

Il existe $t \in]|z|, R[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 $|(n+1)a_{n+1}z^n| = \frac{1}{|z|}|a_{n+1}t^{n+1}|(n+1)\left(\frac{|z|}{t}\right)^{n+1} = o(a_{n+1}t^{n+1})$, d'après les croissances comparées, car $\frac{|z|}{t} \in [0, 1[$. Or $t \in [0, R[$, donc $\sum |a_n t^n|$ est convergente, donc par changement de variable, c'est encore le cas pour $\sum |a_{n+1}t^{n+1}|$. Alors, d'après le cours sur les séries à termes positifs, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ est absolument convergente.

Ceci démontre que R est le rayon de convergence de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$.

12°) a) K est un fermé borné et \mathbb{C} est de dimension finie, donc K est un compact. Soit $z \in B_f(z_0, r)$. Alors $|z| = |(z - z_0) + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| \leq r + |z_0| < R$, donc $z \in B_o(0, R)$. Ainsi, $B_f(z_0, r) \subset B_o(0, R)$.

b) D'après la question 8, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue sur K , donc $\sum_{n \geq 1} g_n$ est bien une série de vecteurs de $\mathcal{C}(K, \mathbb{C})$.

Soit $z \in K = B_f(z_0, r)$. D'après la question 9, lorsque $z \neq z_0$, $|g_n(z)| \leq n|a_n|(|z_0| + r)^{n-1}$. C'est encore vrai lorsque $z = z_0$, donc $n|a_n|(|z_0| + r)^{n-1}$ est un majorant de $\{|g_n(z)| / z \in K\}$, or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc $\|g_n\|_\infty = \sup_{z \in K} |g_n(z)| \leq n|a_n|(|z_0| + r)^{n-1}$.

Par ailleurs, d'après la question précédente, la série entière $t \mapsto \sum (n+1)a_{n+1}t^n$ a pour rayon de convergence R , or $|z_0| + r < R$, donc la série $\sum (n+1)a_{n+1}(|z_0| + r)^n$ est absolument convergente. En passant aux sommes partielles, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} n|a_n|(|z_0| + r)^{n-1}$ est convergente, donc d'après le cours, la série $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_\infty$ est convergente, ce qu'il fallait démontrer.

c) D'après l'énoncé, cette absolue convergence implique la convergence, donc il existe $S \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$ tel que $\sum_{k=1}^n g_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$, au sens de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $z \in K$. $|S(z) - \sum_{k=1}^n g_k(z)| \leq \|S - \sum_{k=1}^n g_k\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\sum_{k=1}^n g_k(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S(z)$, ce

qui montre que $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$.

On a ainsi montré que $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$ est une application définie et surtout continue

sur K . En particulier, $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z) \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{z \in K} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z_0)$.

Pour tout $z \in B_o(0, R)$, posons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Lorsque $z \in B_o(0, R) \setminus \{z_0\}$, $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z)$,

donc $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \in K \setminus \{z_0\}]{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n$.

De plus, $K = B_f(z_0, r)$ est un voisinage de z_0 et la notion de limite est une notion

locale, donc $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \xrightarrow[z \in B_o(0, R) \setminus \{z_0\}]{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z_0^n$, ce qui conclut.

13°) \diamond Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. On note R le rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que $R > 0$. Pour tout $z \in B_o(0, R)$, on

note $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, cette quantité étant bien définie car la série est absolument convergente.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons $R(p)$ l'assertion suivante : la série entière

$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^p (n+k) \right) a_{n+p} z^n$ admet R pour rayon de convergence, g est de classe D^p

sur $B_o(0, R)$ et pour tout $z \in B_o(0, R)$, $g^{(p)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^p (n+k) \right) a_{n+p} z^n$.

Pour $p = 0$, $R(0)$ est évidente car le produit $\prod_{k=1}^0 (n+k)$ est égal à 1 en tant que produit vide.

Pour $p \in \mathbb{N}$, supposons $R(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $b_n = \left(\prod_{k=1}^p (n+k) \right) a_{n+p}$.

D'après $R(p)$, R est le rayon de convergence de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$, donc d'après la question

11, R est aussi le rayon de convergence de $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}z^n$, or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)b_{n+1} = (n+1) \left(\prod_{k=1}^p (n+1+k) \right) a_{n+p+1} = \left(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \right) a_{n+p+1}$, donc la série

entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \right) a_{n+p+1} z^n$ a pour rayon de convergence R .

De plus, d'après la question précédente et d'après $R(p)$, $g^{(p)}$ est holomorphe sur $B_o(0, R)$

et pour tout $z \in B_o(0, R)$, $g^{(p+1)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{p+1} (n+k) \right) a_{n+p+1}z^n$.

Ceci prouve $R(p+1)$.

D'après le principe de récurrence, et d'après la question 4, on a montré que g est de classe C^∞ sur $B_o(0, R)$.

◇ Soit maintenant Ω un ouvert de \mathbb{C} et soit f une application développable en série entière sur Ω .

Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de complexes tels que $B_o(z_0, r) \subset \Omega$, r est inférieur au rayon de convergence de la série entière $z \mapsto \sum a_n z^n$ et tels que,

pour tout $z \in B_o(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Lorsque $z \in B_o(0, r)$, $z_0 + z \in B_o(z_0, r)$, donc on peut poser $g(z) = f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

D'après le point précédent, g est de classe C^∞ sur $B_o(0, r)$.

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, f est de classe D^p sur $B_o(z_0, r)$ et que pour tout $z \in B_o(z_0, r)$, $f^{(p)}(z) = g^{(p)}(z - z_0)$.

La propriété est évidente pour $p = 0$ et si elle est vraie à l'ordre p , alors $f^{(p)}$ étant la composée de $g^{(p)}$ (qui est holomorphe sur l'ouvert $B_o(0, r)$) avec l'application

$z \mapsto z - z_0$ (qui est polynomiale donc holomorphe d'après la question 6), $f^{(p)}$ est holomorphe sur $B_o(z_0, r)$ d'après la question 7, avec pour tout $z \in B_o(z_0, r)$,

$$f^{(p+1)}(z) = \frac{d(z-z_0)}{dz} g^{(p+1)}(z - z_0) = g^{(p+1)}(z - z_0).$$

Ceci prouve la propriété à l'ordre $p+1$.

Ainsi, la restriction de f à $B_o(z_0, r)$ est de classe C^∞ donc elle est en particulier dérivable à tout ordre en z_0 . Or les notions de limite et de continuité sont locales, donc il en est de même de la notion d'application de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, $B_o(z_0, r)$ étant un voisinage de z_0 inclus dans Ω , on a prouvé que f est dérivable à tout ordre en z_0 , pour tout $z_0 \in \Omega$, ce qui conclut.

Partie III : $C^1 \implies C^\infty$.

14°) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par intégration par parties,

$$2\pi c_n(g') = \int_0^{2\pi} g'(t) e^{-int} dt = [g(t) e^{-int}]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} i n g(t) e^{-int} dt, \text{ or } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique,}$$

donc $g(0) = g(2\pi) e^{-2in\pi}$. Ainsi, $2\pi c_n(g') = 2\pi i n c_n(g)$, ce qu'il fallait démontrer.

15°) Soit $r \in]0, R[$. g_r est bien une application 2π -périodique.

f est de classe C^1 sur Ω et $t \mapsto z_0 + r e^{it}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc g_r est la composée de deux applications de classe C^1 , mais l'une est C^1 au sens du cours et l'autre au sens de la première partie. Il faut donc effectuer une démonstration, similaire à ce que l'on a fait en question 7.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, posons $h(t) = z_0 + r e^{it}$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. h est dérivable en t_0 , donc lorsque t tend vers 0,

$$h(t_0 + t) = h(t_0) + th'(t_0) + o(t).$$

Alors $g_r(t_0 + t) = f(h(t_0 + t)) = f(h(t_0) + u)$, où $u = th'(t_0) + o(t)$. u tend vers 0 lorsque t tend vers 0, et f est dérivable en $h(t_0)$, donc d'après la question 4,

$$\begin{aligned} g_r(t_0 + t) &= f(h(t_0)) + uf'(h(t_0)) + o(u) \\ &= g_r(t_0) + th'(t_0)f'(h(t_0)) + o(t)f'(h(t_0)) + o(th'(t_0) + o(t)), \end{aligned}$$

donc de même qu'en question 7, on obtient que $g_r(t_0 + t) = g_r(t_0) + th'(t_0)f'(h(t_0)) + o(t)$, ce qui prouve que g_r est dérivable en t_0 avec $g'_r(t_0) = h'(t_0)f'(h(t_0)) = ire^{it_0}f'(z_0 + re^{it_0})$.

f est supposée C^1 , donc f' est continue. Ainsi, par composition g'_r est une application continue sur \mathbb{R} , ce qui prouve que g_r est de classe C^1 sur \mathbb{R} , avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{g'_r(t) = ire^{it}f'(z_0 + re^{it})}$.

16°) \diamond Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $r \in]0, R[$. D'après les questions 14 et 15,

$$c_n(g'_r) = inc_n(g_r) = ind_n(r) \text{ et } c_n(g'_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ire^{it}f'(z_0 + re^{it})e^{-int} dt, \text{ donc d'après}$$

la formule de l'énoncé portant sur d'_n , $ind_n(r) = ird'_n(r)$,

ce qui montre que $\boxed{d'_n(r) = \frac{n}{r}d_n(r)}$.

\diamond Soit $n \in \mathbb{Z}$. d_n satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant, or $\int \frac{n}{r} dr = n \ln r + k$, donc d'après le cours, il existe $a_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $r \in]0, R[$, $d_n(r) = a_n e^{n \ln r} = a_n r^n$.

17°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n < 0$. Soit $R' \in]0, R[$. Posons $K = B_f(0, R')$.

K est un compact inclus dans Ω . f est continue sur le compact K , donc d'après le cours, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $z \in K$, $|f(z)| \leq M$.

Soit $r \in]0, R'[$. Par inégalité triangulaire, puis en tenant compte du fait que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, z_0 + re^{it} \in K, 2\pi|d_n(r)| \leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq \int_0^{2\pi} M dt = 2\pi M, \text{ donc}$$

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0, \text{ car } n < 0. \text{ Ceci prouve que } a_n = 0.$$

18°) Soit $z \in B_o(z_0, R)$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $z - z_0 = re^{it}$.

$$r = |z - z_0| \in [0, R[.$$

Supposons d'abord que $r \neq 0$. Alors $r \in]0, R[$ et on peut utiliser ce qui précède.

g_r est de classe C^1 d'après la question 15, donc d'après le théorème de Dirichlet,

$$\sum_{k=-n}^n c_k(g_r) e^{ikt} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} g_r(t) = f(z_0 + re^{it}) = f(z).$$

Or pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(g_r) = d_k(r) = r^k a_k$ avec $a_k = 0$ lorsque $k < 0$, donc

$$\sum_{k=0}^n a_k r^k e^{ikt} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(z), \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(z).$$

Ceci prouve que la série $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge et que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$.

Il reste à prouver cette égalité lorsque $r = 0$, c'est-à-dire que pour $z = z_0$, il reste à montrer que $f(z_0) = a_0$. Or, avec $r' \in]0, R[$,

$a_0 = a_0 r'^0 = d_0(r') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r' e^{it}) dt$. D'après l'énoncé, cette dernière quantité tend vers $f(z_0)$ lorsque r' tend vers 0, donc on a bien $a_0 = f(z_0)$.

19°) On suppose que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une application de classe C^1 sur un ouvert Ω . Soit $z_0 \in \Omega$. Ω est un ouvert, donc il existe $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ tel que $B_o(z_0, R) \subset \Omega$. D'après la question précédente, il existe une suite de complexes (a_n) telle que, pour tout $z \in B_o(z_0, R)$, la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$.

Il reste à montrer que R est inférieur au rayon R' de convergence de la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$: Soit $t \in [0, R[$. Alors $z_0 + t \in B_o(z_0, R)$, donc la série $\sum a_n t^n$ est convergente, donc la suite $(a_n t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $t \leq R'$. On fait tendre t vers R pour en déduire que $R \leq R'$.

20°) D'après la question 13, f et g sont de classe C^∞ sur \mathbb{C} , donc elle sont a fortiori de classe C^1 . Alors d'après la question 7, $g \circ f$ est holomorphe et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$. Or f' et g' sont continues, donc d'après les théorèmes usuels, $(g \circ f)'$ est continue. Ainsi $g \circ f$ est de classe C^1 sur \mathbb{C} , donc d'après la question précédente, $g \circ f$ est développable en série entière sur \mathbb{C} .

En fait, on peut montrer que toute application holomorphe sur un ouvert Ω est de classe C^1 , donc est développable en série entière sur Ω et est en particulier de classe C^∞ sur Ω .