

Feuille d'exercices 18. Dérivation et convexité

Exercice 18.1 : (niveau 1)

Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}, f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, f(x) = |\ln x|, f(x) = \cos(\sqrt{x}) \text{ et } f(x) = x|x|.$$

Exercice 18.2 : (niveau 1)

Étudiez les suites (x_n) de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Exercice 18.3 : (niveau 1)

Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\left| x \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right| \leq \frac{1}{6}(x - 1)^3$.

Exercice 18.4 : (niveau 1)

Pour $t \neq 0$ on pose $f(t) = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}$. Prolongez f par continuité en 0 ; ce prolongement est-il dérivable, est-il de classe C^1 ?

Exercice 18.5 : (niveau 1)

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel et C_1 et C_2 sont deux parties convexes de E .

On note C l'ensemble des milieux des couples de points (A_1, A_2) où $A_1 \in C_1$ et $A_2 \in C_2$.

Montrer que C est convexe.

Exercice 18.6 : (niveau 1)

Déterminez les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} convexes et bornées.

Exercice 18.7 : (niveau 1)

Étudiez les suites (x_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a^2}{x_n} \right),$$

où $a > 0$.

Exercice 18.8 : (niveau 1)

Soit f une application dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et pour laquelle il existe $a \in]0, 1]$ tel que $f(a)f'(a) < 0$. Montrez qu'il existe $b \in]0, 1]$ tel que $f'(b) = 0$.

Exercice 18.9 : (niveau 2)

Soit P une fonction polynomiale de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ ne possède qu'un nombre fini de solutions dans \mathbb{R} .

Exercice 18.10 : (niveau 2)

Montrer que $x \mapsto x^2 \tan \frac{1}{x} \sin \frac{2}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0. Cette fonction est-elle de classe C^1 en 0 ?

Exercice 18.11 : (niveau 2)

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \frac{1 + 2u_n}{1 + 3u_n}$.

Étudiez (u_n) et donnez un équivalent.

Exercice 18.12 : (niveau 2)

Donner l'exemple d'un couple (f, g) , où f et g sont deux applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , non dérivables sur \mathbb{R} en entier, mais telles que $f \circ g$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 18.13 : (niveau 2)

Soit f une application paire et dérivable, de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $g(x) = f(\sqrt{x})$.

Lorsque f est deux fois dérivable en 0, montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+ .

Est-ce encore vrai sans supposer que f est deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 18.14 : (niveau 2)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans \mathbb{R} et soit $a \in \mathbb{R}$.

1°) On suppose que f est strictement convexe sur I .

Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au plus deux solutions.

2°) On suppose seulement que f est convexe sur I . Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$?

Exercice 18.15 : (niveau 2)

On considère deux applications f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1°) Si f et g sont continues, montrer que $\max(f, g)$ est également continue.

2°) Lorsque f et g sont dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$, à quelle condition $\max(f, g)$ est-elle dérivable en x_0 ?

Exercice 18.16 : (niveau 2)

Soit f une application de I dans \mathbb{R} , où I désigne un intervalle inclus dans \mathbb{R} d'intérieur non vide. On suppose que f est dérivable sur I .

1°) Soit $(a, b) \in I^2$. On suppose que $f'(a) < 0$ et que $f'(b) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2°) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle (c'est le théorème de Darboux).

Exercice 18.17 : (niveau 2)

Étudiez les suites telles que : $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.

Exercice 18.18 : (niveau 2)

1°) Soient f et g deux applications de $[a, b]$ dans \mathbb{R} , continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que le déterminant $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix}$ est nul.

2°) Règle de l'Hôpital.

Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans \mathbb{R} continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall t \in V \cap (I \setminus \{a\})$ $g'(t) \neq 0$.

Montrer que s'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\frac{f'(t)}{g'(t)} \xrightarrow[t \neq a]{t \rightarrow a} l$ alors $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \neq a]{t \rightarrow a} l$.

Exercice 18.19 : (niveau 3)

1°) Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

2°) Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)^2$.

Exercice 18.20 : (niveau 3)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrez que la dérivée n -ième de f est de la forme :

$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Prouvez les relations :

$P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - (2n+1)XP_n$; $\forall n \geq 1 \quad P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$;

$(1+X^2)P''_n - (2n-1)XP'_n + n^2P_n = 0$. En déduire que $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_k X^{n-2k}$ avec

$$a_0 = (-1)^n n! \text{ et } a_p = (-1)^{n+p} \frac{n!n(n-1)\dots(n-2p+1)}{4^p (p!)^2}.$$

Montrez que les racines de P_n sont réelles et simples.

Exercice 18.21 : (niveau 3)

Soit f une application de classe C^∞ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$.

Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, strictement croissante et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a_n) = 0$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 18.22 : (niveau 1)

Etudier les suites (x_n) de réels vérifiant la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{x_n}$.

Exercice 18.23 : (niveau 1)

Donnez un exemple d'application définie sur \mathbb{R} admettant un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 mais qui n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 18.24 : (niveau 1)

Démontrez les inégalités suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}; \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan t > \frac{t}{1+t^2};$$

$$\forall t \in]1, +\infty[\quad \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t.$$

Exercice 18.25 : (niveau 2)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n -ième de l'application $x \mapsto e^{x \operatorname{ch} a} \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$.

Exercice 18.26 : (niveau 2)

Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\arctan(t)$.

Exercice 18.27 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^t - 1 - t| \leq \frac{t^2}{2} e^{|t|}$.

2°) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$.

Exercice 18.28 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta(t) \in]0, 1[$ vérifiant $\sin t = t - \frac{t^3}{6} \cos(t\theta(t))$.

2°) Montrer que $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice 18.29 : (niveau 2)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'une primitive n -ème de f sur \mathbb{R} , notée $f^{[n]}$, et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt.$$

Exercice 18.30 : (niveau 2)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} dérivable.

1°) Montrez que si f' est bornée, f est uniformément continue.

2°) Montrez que si $|f'(x)| \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, f n'est pas uniformément continue.

Exercice 18.31 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $L_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}[(t^2 - 1)^n]$: c'est le n -ième polynôme de Legendre. Montrer qu'il est simplement scindé sur \mathbb{R} .

Exercice 18.32 : (niveau 2)

Soit f une application convexe et continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$: On pose $g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$. Montrez que g est convexe.

Exercice 18.33 : (niveau 2)

Soit f une application de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrez que $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 18.34 : (niveau 2)

Etudiez les suites réelles (u_n) vérifiant : $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice 18.35 : (niveau 3)

Soit f une application de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} de classe C^1 , telle que $f(0) = 0$ et telle que $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \geq 0$.

Montrer que $\int_0^x f^3(t) dt \leq \left(\int_0^x f(t) dt\right)^2$.

Exercice 18.36 : (niveau 3)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue en 0 et telle que $\frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0.

Indication. On pourra commencer par étudier le cas où $f(0) = 0 = a$.

Exercice 18.37 : (niveau 3)

Soit f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$. Montrez que f est convexe.

Exercice 18.38 : (niveau 3)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , où I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \geq 0$.

Pour tout $a \in I$ et $x \in I$, on pose $T_a(x) = \sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)$.

Montrer que pour tout $a, a' \in I$ avec $a < a'$, $T_{a'} - T_a$ est convexe sur I .

Exercice 18.39 : (niveau 3)

Lemme de Grönwall :

Soit f et g deux fonctions continues définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

On suppose que g est positive et qu'il existe $x_0, K \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geq x_0$,

$f(x) \leq K + \int_{x_0}^x f(t)g(t) dt$.

Montrer que, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq K \exp\left(\int_{x_0}^x g(t) dt\right)$.

Exercice 18.40 : (niveau 3)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ , où I est un intervalle de \mathbb{R} de cardinal infini. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \neq 0$.

Pour tout $\alpha \in I$ et $x \in I$, on pose $T_\alpha(x) = \sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha)$.

Montrer que les graphes des applications T_α sont deux à deux disjoints.

Exercice 18.41 : (niveau 3)

Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y}$ est constante sur \mathbb{R}^* . On notera $g(x)$ cette constante.

Sauf pour la dernière question, on suppose que g est une application continue sur \mathbb{R} .

1°) Montrer que f est dérivable et que $f' = g$.

2°) Quelles sont les valeurs possibles pour f ?

3°) Reprendre l'exercice en supposant maintenant que g est localement bornée.

Exercice 18.42 : (niveau 3)

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

On recherche les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f(x) = ax + b.$$

1°) Si $a < 0$, montrez qu'il n'y a aucune solution.

2°) Notons
$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto ax + b$$

Montrez que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ calculez h^n (au sens de la composition).

3°) On suppose que $a \in]0, 1[$.

Montrez que $h^{-1} \circ f \circ h = f$.

En déduire les expressions possibles de f .

4°) Achevez la résolution de l'exercice.

Exercice 18.43 : (niveau 3)

Déterminer toutes les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , de classe C^∞ , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n_x \in \mathbb{N}, f^{(n_x)}(x) = 0.$$