Résumé de cours :
Semaine 23, du 16 au 20 mars.

Dérivation (suite et fin)

1 Difféomorphismes

Théorème. Supposons que f est dérivable et strictement monotone. Soit $t \in I$.
f^{-1} est dérivable en $f(t)$ si et seulement si $f'(t) \neq 0$, et dans ce cas $\left(f^{-1}\right)'\big(f(t)\big) = \dfrac{1}{f'(t)}$.

Lorsque $[\forall t \in I,\ \ f'(t) \neq 0]$, $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f\ :\ I \longrightarrow J$ est un C^n-difféomorphisme si et seulement si f est bijective, de classe C^n et si f^{-1} est aussi de classe C^n.

Propriété. f est un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$ si et seulement si f est de classe C^n et si $[\forall t \in I,\ \ f'(t) \neq 0]$.
Il faut savoir le démontrer.

2 Suites récurrentes d'ordre 1

On souhaite étudier une suite (x_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$.
En étudiant l'application f, supposons que l'on ait déterminé un intervalle I tel que $f : I \longrightarrow I$ est continue et monotone, avec $x_0 \in I$.

Représentation graphique de (x_n) : À connaître .

Propriété. Les valeurs possibles pour la limite de x_n sont les points fixes de $f|_I$ et les bornes de I qui n'appartiennent pas à I.

Propriété. Si $f|_I$ est croissante, alors (x_n) est monotone.
Plus précisément, (x_n) est croissante si et seulement si $f(x_0) - x_0 \geq 0$,
et (x_n) est décroissante si et seulement si $f(x_0) - x_0 \leq 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $f|_I$ est croissante. Soit $l \in I$ un point fixe de f.
Si $x_0 \leq l$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq l$. Si $x_0 \geq l$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq l$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $f|_I$ est décroissante. Alors $(f \circ f)|_I$ est croissante, donc les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $f\ :\ I \longrightarrow I$ une application de classe C^1 et $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Si $|f'(\ell)| < 1$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x_0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$: ℓ est un point d'équilibre stable.
Si $|f'(\ell)| > 1$, alors il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x_0 \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N \notin]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$: ℓ est un point d'équilibre instable.
Il faut savoir le démontrer.

Plan d'étude d'une suite vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$:
◇ Représentez le tableau des variations de f.
◇ Lorsque le graphe de f est simple, visualisez le comportement de la suite (x_n).
◇ Trouvez un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et $x_0 \in I$ et f est monotone et continue sur I.
◇ Recherchez les "limites éventuelles".
◇ Si f est croissante sur I, étudiez les signes de $f(x_0) - x_0$ et de $x_0 - l$ (où l est un point fixe), puis conclure.
◇ Si f est décroissante sur I, se ramener au cas précédent en considérant $f \circ f$, ou bien si l'on a conjecturé que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si $|f'(\ell)| < 1$, majorez $|x_{n+1} - \ell| = |f(x_n) - f(\ell)|$ à l'aide du TAF.

3 Fonctions convexes

3.1 Sous-espaces affines

Définition. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{E}$.
$\mathcal{F}$ est un ***sous-espace affine*** de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\boxed{\mathcal{F} = A + F = \{A + x \ / \ x \in F\}}$. Dans ce cas, $F = \{\overrightarrow{MN} \ / \ M, N \in \mathcal{F}\}$: on dit que F est la direction du sous-espace affine $\mathcal{F}$. De plus, pour tout $B \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = B + F$.

Exemples. Un singleton est un sous-espace affine dirigé par $\{0\}$.
Une droite affine de $\mathcal{E}$ est de la forme $\mathcal{D} = A + \mathbb{K}x$, où $A \in \mathcal{E}$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

Propriété. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Soit $y \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $(E) \ : \ f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$, est ou bien vide, ou bien un sous-espace affine de E

Définition. Deux sous-espaces affines sont parallèles si et seulement si ils ont la même direction.

Propriété. Soient $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E et $(\mathcal{E}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. Pour $i \in I$, on note E_i la direction de $\mathcal{E}_i$.
$\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathcal{E}_i$ est ou bien $\emptyset$, ou bien un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$.

Définition. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction E. Un repère de $\mathcal{E}$ est un couple $R = (O, b)$, où O est un point de $\mathcal{E}$, appelé l'origine du repère et où b est une base de E. Si $M \in \mathcal{E}$, les coordonnées de M dans le repère R sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base b.

Définition. Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, $\dim(\mathcal{F}) = \dim(F)$.

3.2 Barycentres et convexité

Notation. On fixe un espace affine $\mathcal{E}$, p points $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathcal{E}$ et p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$.

Définition. On appelle fonction vectorielle de Leibniz l'application $\varphi \ : \ \mathcal{E} \longrightarrow E$ définie par $\varphi(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Définition. Lorsque $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$, φ est constante, et lorsque $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$, φ est bijective. L'unique point G tel que $\varphi(G) = 0$ s'appelle alors le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$. On a donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.

On en déduit que, pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$. On note $G \triangleq \dfrac{\lambda_1 A_1 + \cdots \lambda_p A_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Lorsque, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i = 1$, G s'appelle l'isobarycentre des points $A_1, \ldots, A_p$.

Propriété. ***Homogénéïté du barycentre :***
Si l'on remplace chaque λ_i par $\alpha\lambda_i$ où $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, G n'est pas modifié.

Propriété. ***Associativité du barycentre :*** Soit $k \in \mathbb{N}_p$. Notons G' le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ (on suppose que $\lambda' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$) et G'' le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{k+1 \leq i \leq p}$ (on suppose que $\lambda'' = \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i \neq 0$). Alors G est le barycentre de $((G', \lambda'), (G'', \lambda''))$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $A_i \in \mathcal{F}$, alors $G \in \mathcal{F}$.

Propriété. L'ensemble des barycentres de $A_1, \ldots, A_p$ est égale à $A_1 + \mathrm{Vect}((\overrightarrow{A_1A_i})_{2 \leq i \leq p})$.
Il s'agit du plus petit sous-espace affine contenant $\{A_1, \ldots, A_p\}$.

Exemple. Si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{E}$, la droite (AB) est égale à l'ensemble des barycentres de A et B.
Si A, B et C sont trois points non alignés de $\mathcal{E}$, l'ensemble des barycentres de A, B et C est l'unique plan affine contenant ces trois points.

Définition. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est convexe si et seulement si elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{C}^2$, $[A_1, A_2] \subset \mathcal{C}$, où $[A_1, A_2]$ est le segment d'extrémités A_1 et A_2, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de $((A_1, t), (A_2, 1-t))$, lorsque t décrit $[0, 1]$.
2. Pour tout $(A_1, A_2) \in \mathcal{C}^2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$, le barycentre de $((A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2))$ est dans $\mathcal{C}$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(A_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{C}^p$, pour tout $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}_+^p \setminus \{0\}$, le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ est dans $\mathcal{C}$.

Une partie est donc convexe ssi elle est stable par pour des barycentres pondérés positivement.

Exemple. Les sous-espaces affines sont des convexes.

Propriété. Une intersection de parties convexes est convexe.

Définition. Soit B une partie de $\mathcal{E}$. L'enveloppe convexe de B est le plus petit convexe de $\mathcal{E}$ contenant B. C'est l'ensemble des barycentres d'un nombre fini de points de B affectés de pondérations positives.

3.3 Inégalités de convexité

Notation. On fixe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition. f est convexe si et seulement si

$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.
f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Interprétation géométrique. f est convexe si et seulement si, pour tout $x, y \in I$ avec $x < y$, le graphe de $f|_{[x,y]}$ est au dessous de la corde joignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut également définir la stricte convexité et la stricte concavité, en remplaçant l'inégalité large par une inégalité stricte lorsque $\alpha \in]0,1[$.

Propriété. f est concave et convexe si et seulement si elle est affine, i.e de la forme $x \longmapsto \alpha x + \beta$.

Propriété. Une somme d'un nombre fini d'applications convexes est convexe.

Définition. $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ est un point d'inflexion de f si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f|_{I \cap]x_0-\varepsilon, x_0]}$ est convexe (resp : concave) et $f|_{I \cap [x_0, x_0+\varepsilon[}$ est concave (resp : convexe).

Propriété. L'épigraphe de f est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$.
f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété. ***Inégalité de Jensen.*** f est convexe si et seulement si
$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n \ \ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \ , \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \Longrightarrow f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Il faut savoir le démontrer.

Exercice. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$ est inférieure à la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.
Il faut savoir le démontrer.

3.4 Croissance des pentes

Propriété. Lorsque $x, y \in I$ avec $x \neq y$, on pose $p_x(y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = p_y(x)$: c'est la pente de la corde d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe sur I.
2. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_a(b) \leq p_a(c)$.
3. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_b(a) \leq p_b(c)$.
4. Pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_c(a) \leq p_c(b)$.

Ainsi, f est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$ l'application p_{x_0} est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Si f est convexe sur I, elle est dérivable à droite et à gauche en tout point de $\overset{\circ}{I}$. En particulier, elle est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
Il faut savoir le démontrer.

3.5 Fonctions convexes dérivables

Propriété. Si f est dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe si et seulement si $\forall x \in I \ \ f''(x) \geq 0$.

Propriété. On suppose que f est deux fois dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ et que $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
Si f'' change de signe au voisinage de x_0, alors x_0 est un point d'inflexion de f.

Les équations différentielles

4 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On s'intéresse aux équations différentielles $(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$ en l'inconnue y, où I est un intervalle, et où a et b sont deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$.
(H) est l'équation homogène (ou bien l'équation sans second membre, ESSM) associée à (E).

Définition. les courbes intégrales de (E) sont les graphes des solutions de (E).

Définition. Soit $y_0 \in \mathbb{K}$ et $t_0 \in I$. Le problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0, y_0) est la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E = \{y_0 + y / y \in S_H\} \stackrel{\Delta}{=} y_0 + S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Notons A une primitive de a. Alors $y' = a(t)y \Longleftrightarrow [\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}]$.
Il faut savoir le démontrer.

Méthode de variation de la constante : avec les notations précédentes, on pose $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Alors $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t)e^{A(t)} = b(t)$. Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout problème de Cauchy relatif à (E), il y a existence et unicité d'une solution.