

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 20 : du lundi 23 mars au vendredi 27.

Dérivation, convexité

Liste des questions de cours

- 1°) Dérivée d'un produit de la forme $B(f, g)$ où B est bilinéaire : énoncé précis et démonstration.
- 2°) Dérivée d'une composée : énoncé et démonstration.
- 3°) Montrer qu'une composée de deux applications de classe C^n est de classe C^n .
- 4°) Énoncer et démontrer le lemme de Rolle généralisé.
- 5°) Énoncer et démontrer le théorème de la limite de la dérivée.
Que se passe-t-il lorsque $f'(x) \xrightarrow[x \in I \setminus \{a\}]{x \rightarrow a} +\infty$?
- 6°) CNS pour que f^{-1} soit dérivable en $f(t)$: énoncé et démonstration.
- 7°) CNS pour que f soit un C^n -difféomorphisme de I dans $f(I)$: énoncé et démonstration.
- 8°) Représentez graphiquement les composantes d'une suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$.
- 9°) Lorsque $f(\ell) = \ell$ avec $|f'(\ell)| < 1$, montrer que ℓ est un point d'équilibre localement stable.
- 10°) Énoncer et démontrer la propriété d'associativité du barycentre.
- 11°) Donner la définition d'une fonction convexe ainsi que son interprétation géométrique.
- 12°) Montrer qu'une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. En déduire l'inégalité de Jensen.
- 13°) Si f est dérivable, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Dérivation

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . I est un intervalle d'intérieur non vide et $a \in I$.
Les applications considérées sont définies sur I et sont à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E .

1 Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivées à gauche et à droite.

f est dérivable en a si et seulement si il existe $l \in E$ tel que $f(t) = f(a) + (t - a)l + o(t - a)$.

dérivable \implies continue.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivation d'une application à valeurs dans un produit cartésien d'espaces vectoriels normés.

Dérivation d'une application à valeurs dans un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, en fonction de ses applications coordonnées.

Cas particulier : $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a ssi $\text{Im}(f)$ et $\text{Re}(f)$ sont dérivables en a .

Linéarité de la dérivation,

Dérivée de $u \circ f$, où u est linéaire continue et f dérivable.

Définition d'une application bilinéaire,

dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire continue et où f et g sont dérivables.

Dérivation d'une composée.

Dérivée de l'inverse lorsque $f(I) \subset \mathbb{K}$.

Dérivée logarithmique.

3 Dérivées d'ordre supérieur

Applications D^n et C^n .

Formule de Leibniz pour la dérivée d'ordre n de $B(f, g)$.

Composée d'applications D^n ou C^n .

4 L'égalité des accroissements finis

Dans ce paragraphe, toutes les applications utilisées sont définies sur I et sont à valeurs dans \mathbb{R} .

Les extremums locaux sur $\overset{\circ}{I}$ de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sont des points critiques de f . Réciproque fausse.

lemme de Rolle

Généralisation : Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée, généralisation aux dérivées d'ordre supérieur et aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

5 Formules de Taylor

L'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme) pour une fonction à valeurs dans \mathbb{R} .

Inégalité des accroissements finis pour une fonction C^1 à valeurs dans \mathbb{C} .

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young.

6 Monotonie et dérivabilité

Lien entre sens de variation et signe de la dérivée.

Condition de stricte monotonie.

Dérivée de f^{-1} .

CNS pour que f soit un C^n -difféomorphisme de I dans $f(I)$.

7 Suites récurrentes d'ordre 1

Étude de suites (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$, lorsque x_0 est dans un intervalle I tel que $f : I \rightarrow I$ est continue et monotone.

Représentation graphique de (x_n) .

Limites et points fixes de f .

Lorsque $f|_I$ est croissante, (x_n) est monotone, toujours à gauche ou toujours à droite d'un point fixe.

Lorsque $f|_I$ est décroissante, les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.

Lorsque $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| < 1$ (resp : $|f'(\ell)| > 1$), ℓ est un point d'équilibre localement stable (resp : instable).

Convexité

Remarque. Les deux premiers paragraphes n'ont presque pas fait l'objet d'exercices en TD.

8 Sous-espaces affines

Repère affine.

Dimension d'un sous-espace affine.

Sous-espaces affines parallèles.

L'ensemble des solutions d'une équation linéaire compatible est un sous-espace affine.

Intersection de sous-espaces affines.

9 Barycentres et convexité

Notation. On fixe un espace affine \mathcal{E} , p points A_1, \dots, A_p de \mathcal{E} et p scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dans \mathbb{K} .

Fonction vectorielle de Leibniz : $\forall M \in \mathcal{E}, \varphi(M) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ lorsque $\sum_{i=1}^p \lambda_i \neq 0$.

Homogénéité et associativité du barycentre.

Parties convexes.

Les sous-espaces affines sont des convexes.

Une intersection de parties convexes est convexe.

Enveloppe convexe.

10 Fonctions convexes

10.1 Définition

Notation. On fixe une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

Convexité et concavité, stricte convexité.

Interprétation géométrique.

Sommes de fonctions convexes.

Points d'inflexion.

L'épigraphe de f , égal à $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$, est convexe si et seulement si f est convexe.

Inégalité de Jensen.

la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n}}$ est inférieure à la moyenne arithmétique $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

10.2 Croissance des pentes

Convexité et croissance des pentes : en posant $p_x(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = p_y(x)$, f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_a(b) \leq p_a(c)$ (resp : $p_b(a) \leq p_b(c)$), ou encore $p_c(a) \leq p_c(b)$.

Hors programme : Si f est convexe sur I , elle est dérivable à droite et à gauche, donc elle est continue, en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

10.3 Fonctions convexes dérivables

Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si f' est croissante, ou bien si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.

Prévisions pour la semaine suivante :

Équations différentielles.