Feuille d'exercices 18.
Corrigé de quelques exercices.

Exercice 18.11 :

$\diamond$ Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est défini et $u_n \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi, on peut écrire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est l'application $x \longmapsto x\dfrac{1+2x}{1+3x}$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
$\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$f'(x) = \dfrac{(1+4x)(1+3x) - 3(x+2x^2)}{(1+3x)^2} = \dfrac{6x^2+4x+1}{(1+3x)^2} > 0.$
Ainsi, f réalise un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans $f(\mathbb{R}_+)$.
De plus, $f(0) = 0$ et au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \frac{2}{3}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc f est un C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.
$\diamond$ $f(x) - x = -\dfrac{x^2}{1+3x} \leq 0$, donc (u_n) est décroissante et minorée par 0. Ainsi, elle converge vers $l \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(l) - l = 0$, donc $l = 0$. On a donc montré que u_n tend vers 0 en décroissant.
$\diamond$ Pour rechercher un équivalent de u_n, appliquons la méthode "classique" suivante : on cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}^*$ puis, par sommation des équivalents, on en déduit un équivalent de u_n^α.
Ici, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha([(1+2u_n)(1-3u_n+o(u_n))]^\alpha - 1)$, car $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc
$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(1 - \alpha u_n - 1 + o(u_n)) = -\alpha u_n^{\alpha+1} + o(u_n^{\alpha+1})$. Ainsi, pour $\alpha = -1$, on obtient : $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
La série $\sum 1$ diverge grossièrement, donc par sommation des équivalents,
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \sim n$, ce qui montre que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 18.16 :

1°) Supposons que $f_{/[a,b]}$ est injective. f étant dérivable, elle est continue. On sait alors que $f_{/[a,b]}$ est strictement monotone. Mais $f'(a) < 0$, donc $f'(b) \leq 0$, ce qui est faux. Ainsi, $f_{/[a,b]}$ n'est pas injective, donc il existe $(\alpha, \beta) \in [a,b]^2$ avec $\alpha < \beta$ tel que $f(\alpha) = f(\beta)$. D'après le lemme de Rolle, il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2°) Une partie de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe. Il s'agit donc de montrer que, si $(A, B) \in f'(I)^2$ avec $A < B$, $[A, B] \subset f'(I)$.
Soit $C \in]A, B[$. Il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $A = f'(a)$ et $B = f'(b)$.
$f'(a) - C = A - C < 0$ et $f'(b) - C > 0$.
Notons $g(t) = f(t) - Ct$. g est définie et dérivable sur I. De plus, $g'(a) < 0$ et $g'(b) > 0$.
Appliquons le résultat de la première question en substituant f par g. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = f'(c) - C$, donc $C = f'(c) \in f'(I)$. Ainsi, $[A, B] \subset f'(I)$.

Exercice 18.17 :

Posons $f(x) = \sqrt{2 - x}$. f est décroissante et continue sur $]-\infty, 2]$.
◇ Si $x_0 > 2$, x_1 n'est pas défini.
◇ Si $x_0 < -2$, x_2 n'est pas défini.
◇ Pour la suite, on suppose que $x_0 \in [-2, 2]$.
$f([-2, 2]) = [0, 2] \subset [-2, 2]$, donc la suite (x_n) est bien définie et elle est à valeurs dans $[-2, 2]$.
$f(l) = l \iff l = \sqrt{2 - l} \iff (l \geq 0 \text{ et } l^2 + l - 2 = 0)$. Or $l^2 + l - 2 = (l - 1)(l + 2)$, donc $f(l) = l \iff l = 1$.
• *P*remière méthode : Graphiquement, on devine que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. On démontre alors cette propriété par majoration de $|x_n - 1|$.
$f([0, 2]) = [0, \sqrt{2}]$, donc dès que $n \geq 2$, $x_n \in [0, \sqrt{2}]$. Alors,
$|x_{n+1} - 1| = |\sqrt{2 - x_n} - 1| = |\dfrac{2 - x_n - 1}{\sqrt{2 - x_n} + 1}| \leq \dfrac{|x_n - 1|}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1}$,
donc $|x_n - 1| \leq \dfrac{|x_2 - 1|}{(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 1)^{n-2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
• *D*euxième méthode : On étudie $f \circ f$. On suppose que $x_0 \in [0, \sqrt{2}]$.
$f \circ f(x) \geq x \iff x^2 \leq 2 - \sqrt{2 - x} \iff 2 - x^2 \geq \sqrt{2 - x} \iff 4 + x^4 - 4x^2 \geq 2 - x$, donc $f \circ f(x) \geq x \iff x^4 - 4x^2 + x + 2 \geq 0 \iff (x - 1)(x^3 + x^2 - 3x - 2) \geq 0 \iff (x - 1)(x + 2)(x^2 - x - 1) \geq 0$.
$\Delta = 5$, donc les racines de $x^2 - x - 1$ sont $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ainsi, sur $[0, \sqrt{2}]$, $x^2 - x - 1 < 0$.
Supposons que $x_0 \in [0, 1[$. $[0, 1]$ est stable par $f \circ f$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{2n} \in [0, 1]$.
De plus, sur $[0, 1]$, $f \circ f(x) - x \geq 0$, donc (x_{2n}) est croissante et majorée par 1. Ainsi cette suite converge vers un point fixe de $f \circ f$, qui en l'occurrence est nécessairement 1. Ainsi, $x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. De même, on montre que $x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Le cas où $x_0 \in]1, \sqrt{2}]$ se traite de la même façon.

Exercice 18.19 :

1°) ◇ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(2x) = 2f(x)$.
[Pour utiliser l'hypothèse de dérivabilité en 0, il faut se ramener au voisinage de 0, ce que l'on peut faire en considérant $\dfrac{x}{2^n}$.]
f étant dérivable en 0, pour t au voisinage de 0, $f(t) = f(0) + tf'(0) + o(t)$. Or $f(2 \times 0) = 2 \times f(0)$, donc $f(0) = 0$. Ainsi, $f(t) = tf'(0) + o(t)$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. $\dfrac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc lorsque n est au voisinage de $+\infty$, x étant fixé, $f(\dfrac{x}{2^n}) = \dfrac{x}{2^n}f'(0) + o(\dfrac{1}{2^n})$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\dfrac{x}{2^n}) = \dfrac{1}{2^n}f(x)$. En effet, c'est clair pour $n = 0$ et, si $f(\dfrac{x}{2^n}) = \dfrac{1}{2^n}f(x)$, alors $f(x) = 2^n f(2\dfrac{x}{2^{n+1}}) = 2^{n+1}f(\dfrac{x}{2^{n+1}})$.

$\diamond$ On en déduit que $f(x) = xf'(0) + 2^n o(\dfrac{1}{2^n}) = xf'(0) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xf'(0)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(0)$.

$\diamond$ Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda Id_{\mathbb{R}}$, il est clair que f convient, donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est la droite vectorielle engendrée par } Id_{\mathbb{R}}}$.

2°) [Si $f(2x) = f^2(x)$, $(\ln \circ f)(2x) = 2(\ln \circ f)(x)$ et on peut appliquer la question précédente. Mais pour que $\ln \circ f$ soit définie sur $\mathbb{R}$, il faut que f soit à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.]

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(2x) = f^2(x)$.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$.

On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(\dfrac{x}{2^n}) = f(x)^{(2^{-n})}$.

$\diamond$ *P*remier cas. On suppose qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\dfrac{b}{2^n}) = f(b)^{(2^{-n})} = 0$.

Mais, f est continue en 0, donc $f(\dfrac{b}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$. Ainsi, $f(0) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(x) \neq 0$. Alors $f(x) > 0$ et $f(\dfrac{x}{2^n}) = f(x)^{(2^{-n})} = e^{2^{-n}ln(f(x))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, mais $f(\dfrac{x}{2^n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) = 0$. C'est impossible, donc f est identiquement nulle.

$\diamond$ *D*euxième cas. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\ln \circ f)(2x) = 2(\ln \circ f)(x)$ et $\ln \circ f$ est dérivable en 0. D'après la première question, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln \circ f = \lambda Id_{\mathbb{R}}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\lambda x}$.

$\diamond$ Réciproquement, on vérifie que l'application identiquement nulle et les applications $x \longmapsto e^{\lambda x}$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$) conviennent.

Exercice 18.20 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{R}(n)$ l'assertion suivante : il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P_n) = n$ et $\forall t \in \mathbb{R}\ \ f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} = P_n(t)(1+t^2)^{-(n+\frac{1}{2})}$.

• Pour $n = 0$: $P_0 = 1$ convient, d'où $\mathcal{R}(0)$.

• Pour $n \geq 0$: supposons $\mathcal{R}(n)$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable et : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= P_n'(t)(1+t^2)^{-(n+\frac{1}{2})} - P_n(t)(n+\tfrac{1}{2})(1+t^2)^{-(n+\frac{3}{2})}2t \\ &= \frac{(1+t^2)P_n'(t) - P_n(t)\,t\,(2n+1)}{(1+t^2)^{n+1}\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

En posant $P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - X(2n+1)P_n$, on obtient :

$\forall t \in \mathbb{R} \;\; f^{(n+1)}(t) = \dfrac{P_{n+1}(t)}{(1+t^2)^{n+1}} \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

De plus, en posant $P_n = a_n X^n + Q$ où $\deg(Q) \leq n-1$ et $a_n \neq 0$,
$P_{n+1}(X) = (na_n - (2n+1)a_n)X^{n+1} + H$ où $\deg(H) \leq n$.
Comme $na_n - (2n+1)a_n = -(n+1)a_n \neq 0$, on a $\deg(P_{n+1}) = n+1$, d'où $\mathcal{R}(n+1)$.

$\star$ La première relation de récurrence est une conséquence de ce qui précède.

$\star$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{d}{dt}\left[(1+t^2)f(t)\right] = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{1+t^2}\right) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = t\,f(t)$.

Donc $\dfrac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left((1+t^2)f(t)\right) = \dfrac{d^n}{dt^n}\left(t\,f(t)\right)$.

D'après la formule de Leibniz :

$$(1+t^2)f^{(n+1)}(t) + (n+1)\cdot 2t\,f^{(n)}(t) + \frac{n(n+1)}{2}\cdot 2\,f^{(n-1)}(t) = t\,f^{(n)}(t) + n\,f^{(n-1)}(t).$$

Soit, en multipliant par $(1+t^2)^n\sqrt{1+t^2}$: $\boxed{P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0.}$

$\star$ Soit $n \geq 1$: des deux relations précédentes on déduit :
$(1+X^2)P_n' = P_{n+1} + (2n+1)XP_n = -n^2(1+X^2)P_{n-1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; P_n' = -n^2\,P_{n-1}$.

Or, d'après la première relation : $P_{n+1}' = (1+X^2)P_n'' + 2XP_n' - (2n+1)XP_n' - (2n+1)P_n$.

D'où $\boxed{(1+X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2P_n = 0.}$

$\star$ Posons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}X^k$. Alors $P_n'(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{n-k}kX^{k-1}$,

donc $XP_n'(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}kX^k$. De plus,

$$P_n''(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)b_{n-k}X^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\,b_{n-k-2}\,X^k$$

et $X^2P_n''(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)b_{n-k}X^k$. Ainsi, la relation encadrée précédente s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\,b_{n-k-2}\,X^k + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,b_{n-k}\,X^k - \sum_{k=0}^{n}(k(2n-1)\,b_{n-k} - n^2\,b_{n-k})X^k = 0.$$

Donc, en égalant les coefficients de degré n, puis $n-1$, puis les autres coefficients, on obtient : $n(n-1)b_0 - n(2n-1)b_0 + n^2b_0 = 0$, c'est-à-dire $0\cdot b_0 = 0$,
$(n-1)(n-2)b_1 - (n-1)(2n-1)b_1 + n^2b_1 = 0$, c'est-à-dire $b_1 = 0$, et
$\forall k \in \{0,\dots,n-2\}$: $b_{n-k-2} = \dfrac{-k(k-1) + k(2n-1) - n^2}{(k+2)(k+1)}\,b_{n-k} = \dfrac{-(n-k)^2}{(k+2)(k+1)}\,b_{n-k}$,

donc en posant $h = n-k-2$, $\forall h \in \{0,\dots,n-2\}$: $b_h = \dfrac{-(h+2)^2}{(n-h)(n-h-1)}\,b_{h+2}$, puis, en posant $k = h+2$, $\forall k \in \{2, \dots, n\}$: $b_k = -\dfrac{(n-k+2)(n-k+1)}{k^2}\, b_{k-2}$.

Or $b_1 = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq 2k+1 \leq n$, $b_{2k+1} = 0$.

De plus, en notant temporairement $b_0^{(n)}$ le coefficient dominant de P_n, d'après la démontration par récurrence, $b_0^{(n+1)} = -(n+1) b_0^{(n)}$ et $b_0^{(0)} = 1$, donc $b_0^{(n)} = (-1)^n n! = b_0$.
De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq 2k \leq n$, $b_{2k} = -\dfrac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k^2}\, b_{2(k-1)}$.
Par récurrence sur k, on en déduit que,
$\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq 2k \leq n$, $b_{2k} = (-1)^{n+k}\, n!\, \dfrac{n(n-1)\dots(n-2k+1)}{4^k\,(k!)^2}$, ce qui conclut.

$\star$ Soit $\mathcal{S}(n)$ l'assertion : les racines de P_n sont réelles et simples.

• Pour $n = 0$: cet ensemble est vide, d'où $\mathcal{S}(0)$.

• Pour $n \geq 0$: supposons $\mathcal{S}(n)$. On remarque que $\forall k \in \mathbb{N}\;\; P_k(\alpha) = 0 \iff f^{(k)}(\alpha) = 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence, P_n possède exactement n racines réelles distinctes, que l'on note $t_1, \dots, t_n$, en supposant que $t_1 < \dots < t_n$.
Ainsi, $f^{(n)}$ s'annule en $t_1, \dots, t_n$.
D'après le lemme de Rolle, pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $\beta_j \in]t_j, t_{j+1}[$ tel que $f^{(n+1)}(\beta_j) = 0$. De plus, $f^{(n)}(t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après le lemme de Rolle généralisé, il existe $\beta_0 \in]-\infty, t_1[$ et $\beta_n \in]t_n, +\infty[$ tels que $f^{(n+1)}(\beta_0) = f^{(n+1)}(\beta_n) = 0$. Ainsi P_{n+1} admet $(n+1)$ racines réelles $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n$ et, comme $\deg P_{n+1} = n+1$, on les a toutes.