# DM 44 : Théorème de Baire

## Partie I : Continuité d'une dérivée.

**1°)** $\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|g(x)| \leq x^2 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, en posant $g(0) = 0$, $g$ devient une application continue sur $\mathbb{R}$.
$\diamond$ $g$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes usuels.
On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
De plus, $\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (comme ci-dessus avec le principe des gendarmes), donc $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
$\diamond$ Supposons que $g'$ est continue en 0. Alors $g'(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} g'(0) = 0$, or on a vu que $x \sin \frac{1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\cos \frac{1}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\longrightarrow} 0$. On en deduit par composition que $\cos t \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est faux car $2n\pi \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\cos(2n\pi) = 1$. Ainsi, $g'$ n'est pas continue en 0.

**2°)** Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $g_i(x) = g(x - a_i)$. Posons $h = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i$.
D'après la question précédente, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On peut donc poser $f = h' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i'$.
Posons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.
D'après les théorèmes usuels, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $g_i$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$, donc $h$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus A$. En particulier, $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus A$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Supposons que $f$ est continue en $a_i$.
Pour tout $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$, $g_j'$ est continue en $a_i$ (car $a_i \neq a_j$), donc $f - \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} g_j'$ est continue en $a_i$. Or $f - \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} g_j' = g_i'$, donc $g_i'$ est continue en $a_i$. Mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g_i(x + a_i)$, donc après dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g_i'(x + a_i)$. On en déduit que $g'$ est continue en 0, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f$ n'est pas continue en $a_i$. Ceci prouve que l'application $f$ convient.

**3°)** $h$ est dérivable, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $h_n$ est continue sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h_n(x) = \dfrac{h(x+\frac{1}{n}) - h(x)}{\frac{1}{n} - 0}$, or $\dfrac{h(x+t) - h(x)}{t - 0} \underset{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}}{\longrightarrow} h'(x) = f(x)$, donc par composition des limites, $h_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f'(x)$.

## Partie II : Suites de Cauchy

**4°)** Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de $X$. Avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\| \leq 1$. En particulier, d'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, $\|x_n\| \leq 1 + \|x_N\|$.
Posons $M = \max(1 + \|x_N\|, \max\limits_{0 \leq n < N} \|x_n\|)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$, ce qui prouve que la suite $(x_n)$ est bornée.

**5°)** Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $p, q \geq N$. Alors $\|x_p - x_q\| = \|(x_p - \ell) + (\ell - x_q)\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \varepsilon$.
Ainsi, la suite $(x_n)$ est bien une suite de Cauchy.

**6°)** Pour ce corrigé, on notera $d$ la distance associée à la norme $\|.\|$ de $E$ ou de $F$.
◇ Supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n \geq N \ \ d(x_n, a) \leq \varepsilon$.
Avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe $\varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, a) \leq 1$.
Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, a) \leq \frac{1}{2}$.
Pour $k \geq 1$, supposons construits $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, ..., $\varphi(k)$ des entiers tels que
$\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(k)$ et $\forall h \in \{0, \ldots, k\} \ \ d(x_{\varphi(h)}, a) \leq \dfrac{1}{h+1}$.
Avec $\varepsilon = \dfrac{1}{k+2}$ et $N = \varphi(k)+1$, il existe $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, a) \leq \dfrac{1}{k+2}$.
On construit ainsi une application $\varphi \ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ \ d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
$x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, donc $a$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$.
◇ Réciproquement, supposons que $a$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)$.
Il existe $\varphi \ : \ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \varepsilon$.
On montre facilement par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$ (en effet, $\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$ et si pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$, alors $\varphi(k+1) > \varphi(k) \geq k$, donc $\varphi(k+1) \geq k+1$).
Posons $n = \varphi(\max(M, N))$.
Comme $\max(M, N) \geq M$, $d(x_n, a) = d(x_{\varphi(\max(M,N))}, a) \leq \varepsilon$ et $n \geq \max(M, N) \geq N$.
On a donc montré qu'il existe $n \geq N$ tel que $d(x_n, a) \leq \varepsilon$.

**7°)** On suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $(x_n)$ une suite de Cauchy de $E$. D'après la question 4, c'est une suite bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)$ possède une valeur d'adhérence $a \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. $(x_n)$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
D'après la question précédente, il existe $n_0 \geq N$ tel que $d(x_{n_0}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \geq N$. Alors $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, a) \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

## Partie III : Diamètre et continuité.

**8°)** $A$ est non vide, donc $\{d(x,y) \ / \ x, y \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si cette partie est majorée, d'après la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$, elle possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Sinon, $+\infty$ est son seul majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc on peut dire que cette partie admet $+\infty$ comme borne supérieure. Ainsi, dans tous les cas, $\delta(A)$ est correctement défini.

**9°)** $B$ est nécessairement non vide car elle contient $A$, donc $\delta(B)$ est définie.
$\{d(x,y) \ / \ x, y \in A\} \subset \{d(x,y) \ / \ x, y \in B\}$, donc $\delta(B)$ est un majorant de $\{d(x,y) \ / \ x, y \in A\}$, or $\delta(A)$ est le plus petit des majorants (dans $\overline{\mathbb{R}}$) donc $\delta(B) \geq \delta(A)$.

**10°)** Notons $B = B_o^X(a, r)$. Pour tout $x, y \in B$,
$(1) \ : \ d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq r + r = 2r$, donc $2r$ majore $\{d(x,y) \ / \ x, y \in B\}$, or $\delta(B)$ est le plus petit des majorants, donc $(2) \ : \ \delta(B) \leq 2r$. Par la suite, pour déduire (2) de (1), on dira simplement que l'on passe au sup.

**11°)** D'après le cours, $X \in \mathcal{V}(x)$, donc $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$. Ainsi, $\{\delta(f(V)) \ / \ V \in \mathcal{V}(x)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, minorée par 0. Notons $\Omega$ cette partie.
Si $\Omega = \{+\infty\}$, alors $\inf \Omega$ est défini, c'est même un minimum, égal à $+\infty$.
Sinon, alors $\Omega \setminus \{+\infty\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, donc d'après la propriété de la borne inférieure de $\mathbb{R}$, on peut poser $\omega = \inf(\Omega \setminus \{+\infty\})$. On vérifie alors que $\omega$ est un minorant de $\Omega$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que c'est le plus grand. Ainsi, dans ce cas, $\omega = \inf \Omega$.
En conclusion, dans tous les cas, $\inf(\{\delta(f(V)) \ / \ V \in \mathcal{V}(x)\})$ est défini, en tant qu'élément de $\overline{\mathbb{R}}$, ce qu'il fallait démontrer.

**12°)** $\diamond$ Supposons que $f$ est continue en $x_0$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|x_0 - x\| < \alpha \Longrightarrow \|f(x_0) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $V = B_o^X(x_0, \alpha)$. Alors $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $f(V) \subset B_o^Y(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$, donc d'après les deux questions précédentes, $\delta(f(V)) \leq \delta(B_o(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})) \leq \varepsilon$. On en déduit que $\omega(f, x_0) \leq \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\omega(f, x_0) = 0$.
$\diamond$ Supposons que $\omega(f, x_0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. $\varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{\delta(f(V)) \ / \ V \in \mathcal{V}(x_0)\}$, car le plus grand des minorants est 0, donc il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\delta(f(V)) < \varepsilon$.
$V$ est un voisinage relatif de $x_0$ dans $X$, donc il existe un voisinage $W$ dans $E$ de $x_0$ tel que $V = W \cap X$.
Par définition d'un voisinage, il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^E(x_0, \alpha) \subset W$.
Soit maintenant $x \in X$ tel que $\|x - x_0\| < \alpha$. Alors $x \in (B_o^E(x_0, \alpha) \cap X) \subset W \cap X = V$, donc $f(x) \in f(V)$ et pour les mêmes raisons, $f(x_0) \in f(V)$.
Alors $\|f(x_0) - f(x)\| = d(f(x_0), f(x)) \leq \delta(f(V)) < \varepsilon$.

Ceci démontre que $f$ est continue en $x_0$.

**13°)** Notons $\Omega = \{x \in X \ / \ \omega(f,x) < \varepsilon\}$.
Soit $x \in \Omega$. Alors $\omega(f,x) < \varepsilon$, donc il existe un voisinage $V$ de $x$, relatif à $X$, tel que $\delta(f(V)) < \varepsilon$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^X(x,\alpha) \subset V$. Posons $U = B_o^X(x,\alpha)$.
Soit $y \in U$. $U$ est un ouvert relatif de $X$, donc $U \in \mathcal{V}(y)$. Ainsi, $\omega(f,y) \leq \delta(f(U))$, or $U \subset V$, donc $f(U) \subset f(V)$, donc d'après la question 9, $\omega(f,y) \leq \delta(f(V)) < \varepsilon$. Ainsi $y \in \Omega$, pour tout $y \in U$. Ceci prouve que $U \subset \Omega$, or $U = B_o^X(x,\alpha) \in \mathcal{V}(x)$, donc $\Omega \in \mathcal{V}(x)$, pour tout $x \in \Omega$. Ceci prouve que $\Omega$ est un ouvert relatif de $X$.

## Partie IV : Lemme de Baire

**14°) a)** Soit $\varepsilon > 0$.
$\delta(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\delta(F_n) \leq \varepsilon$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors $x_p \in F_p \subset F_N$ et de même, $x_q \in F_N$, donc $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_N) \leq \varepsilon$. Ainsi, $(x_n)$ est une suite de Cauchy.

**14°) b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ est non vide, donc il existe $x_n \in F_n$.
D'après la question précédente, $(x_n)$ est une suite de Cauchy, or $X$ est complet donc il existe $\ell \in X$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geq n$, $x_p \in F_p \subset F_n$, donc la suite $(x_p)_{p\geq n}$ est une suite du fermé $F_n$, qui converge vers $\ell$. Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\ell \in F_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $\{\ell\} \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Réciproquement, soit $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $x$ et $\ell$ sont tous deux dans $F_n$, donc $0 \leq d(x,\ell) \leq \delta(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le principe des gendarmes, $d(x,\ell) = 0$, donc $x = \ell$. On a montré que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\ell\}$, c'est bien un singleton.

**15°)** $U \neq \emptyset$, donc il existe $x \in U$. $U$ est ouvert, donc $U \in \mathcal{V}(x)$ (sauf précision du contraire, on utilise toujours la topologie induite sur $X$). Mais $U_0$ est dense dans $X$, donc $x \in \overline{U_0}$. Ainsi, $U \cap U_0$ est non vide. Il existe $x_0 \in U \cap U_0$. De plus, $U \cap U_0$ est un ouvert, en tant qu'intersection de deux ouverts, donc il existe $r_0 > 0$ tel que $B_o^X(x_0, 2r_0) \subset U \cap U_0$. Alors $B_f^X(x_0, r_0) \subset U \cap U_0$.

**16°)** $U_{n+1}$ est dense dans $X$, donc $x_n \in \overline{U_{n+1}}$. De plus, $B_o^X(x_n, r_n) \in \mathcal{V}(x_n)$, donc $U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$ est non vide : il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$.
De plus, $U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$ est un ouvert, donc il existe $r > 0$
tel que $B_o^X(x_{n+1}, r) \subset U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$.
Posons $r_{n+1} = \min\left(\dfrac{r}{2}, \dfrac{r_n}{2}\right)$. Alors $r_{n+1} \leq \dfrac{r_n}{2}$ et $B_f^X(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B_f^X(x_n, r_n)$.

**17°)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = B_f^X(x_n, r_n)$. Alors $(F_n)$ est une suite de fermés, décroissante au sens de l'inclusion. De plus, d'après la question 10, sachant que

$F_n \subset B_o^X(x_n, 2r_n)$, $\delta(F_n) \leq 4r_n$. Or on montre facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq \dfrac{r_0}{2^n}$, donc $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'après le principe des gendarmes, $\delta(F_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors, d'après la question 14.b, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.
En particulier, il existe $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n \subset U_n$ et $x \in F_0 \subset U$, donc $x \in U \cap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
Ainsi, si l'on pose $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, on a montré que, pour tout ouvert $U$, $A \cap U \neq \emptyset$.
Soit alors $x \in X$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^X(x, \alpha) \subset V$, or $B_o^X(x, \alpha)$ est un ouvert, donc $A \cap B_o^X(x, \alpha) \neq \emptyset$, donc $A \cap V \neq \emptyset$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, ce qui montre que $x \in \overline{A}$. C'est vrai pour tout $x \in X$, donc $A$ est dense dans $X$. Ainsi, on a montré que si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts relatifs de $X$ denses dans $X$, alors $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est une partie de $X$ dense dans $X$.

**18°)** On suppose que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de fermés de $X$ qui sont tous d'intérieurs vides et on pose $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
Alors $X \setminus F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n)$, or d'après le cours, pour la topologie de $X$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus \mathring{F_n} = X$, car par hypothèse, $\mathring{F_n} = \emptyset$, donc $(X \setminus F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts de $X$ qui sont denses dans $X$. D'après la question précédente, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus F$ est dense dans $X$, donc $X = \overline{X \setminus F} = X \setminus \mathring{F}$, donc $\mathring{F} = \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer.

**19°)** Soit $\Omega$ un ouvert de $X$.
La question 18 se déduit de la question 17 pour n'importe quelle partie $X$ de $E$, on n'utilise aucune hypothèse sur $X$, donc il suffit de montrer que le résultat de la question 17 reste vrai en remplaçant $X$ par $U$, ce sera alors également vrai pour la question 18.
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ouverts relatifs de $\Omega$, denses dans $\Omega$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n$ est un ouvert relatif de $X$.
Sauf précision du contraire, on utilise la topologie relative à $X$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $V_n = U_n \cup (X \setminus \overline{\Omega})$. $V_n$ est un ouvert de $X$, en tant que réunion d'ouverts. De plus d'après le cours, l'adhérence d'une union finie est égale à la réunion des adhérences, donc $\overline{V_n} = \overline{U_n} \cup \overline{X \setminus \overline{\Omega}}$, or $U_n$ est dense dans $\Omega$, donc $\overline{U_n} \supset \Omega$, puis $\overline{\Omega} \subset \overline{\overline{U_n}} = \overline{U_n}$, donc $\overline{V_n} \supset \overline{\Omega} \cup (X \setminus \overline{\Omega}) = X$.
Ainsi, $(V_n)$ est une suite d'ouverts de $X$ qui sont tous denses dans $X$. D'après la question 17, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est dense dans $X$, or par distributivité, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = (X \setminus \overline{\Omega}) \cup \Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big)$. On en

déduit que $X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n} = \overline{X \setminus \overline{\Omega}} \cup \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}$. Mais $(X \setminus \overline{\Omega}) \subset X \setminus \Omega$ et $X \setminus \Omega$ est fermé, donc $\overline{X \setminus \overline{\Omega}} \subset X \setminus \Omega$. Ainsi, si $x \in \Omega$, $x \notin \overline{X \setminus \overline{\Omega}}$, donc $x \in \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}$. On a prouvé que $\Omega \subset \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}$, donc que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans $\Omega$.

## Partie V : Théorème de la limite simple de Baire.

**20°)** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in X$, posons $g_m(x) = \|f_m(x) - f_n(x)\|$. Alors d'après les théorèmes usuels, $g_m$ est une application continue de $X$ dans $\mathbb{R}$, donc $g_m^{-1}([0, \varepsilon])$ est un fermé relatif de $X$, en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Or $g_m^{-1}([0, \varepsilon]) = \{x \in X \ / \ \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\}$, donc $F_n = \bigcap_{m\geq n} g_m^{-1}([0, \varepsilon])$.
Ainsi, $F_n$ est un fermé en tant qu'intersection (même infinie) de fermés.

**21°)** Soit $x \in X$. La suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $X$, donc d'après la question 5, c'est une suite de Cauchy. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $m \geq N$, $\|f_N(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$, donc $x \in F_N$. Ainsi, $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, ce qui montre que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ (l'inclusion réciproque étant évidente).

**22°)** Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ soit d'intérieur vide. C'est une suite de fermés, donc d'après la question 18, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est aussi d'intérieur vide. Alors d'après la question précédente, l'intérieur de $X$ est vide, pour la topologie relative de $X$, or pour cette topologie, $X$ est ouvert, donc est égal à son intérieur. On en déduit que $X$ est vide, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de $F_N$ est non vide.

**23°)** Soit $x \in W$. Alors $x \in F_N$, donc pour tout $m \geq N$, $\|f_m(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$. On fait tendre $m$ vers $+\infty$. Par hypothèse, $f_m(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc l'inégalité précédente donne : $\|f(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$.

**24°)** $f_N$ est continue en $x_0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$,
$\|x - x_0\| < \alpha \Longrightarrow \|f_N(x) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$.
Posons $U = W \cap B_o^X(x_0, \alpha)$. $U$ est un ouvert en tant qu'intersection d'ouverts et on a bien $x_0 \in U \subset W$.
Soit $x \in U$. Alors $\|f_N(x) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$. De plus, $x \in W$ et $x_0 \in W$, donc d'après la question précédente, $\|f(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$ et $\|f(x_0) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$.
Alors, par inégalité triangulaire,
$\|f(x) - f(x_0)\| = \|(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))\| \leq 3\varepsilon$.

**25°)** $W$ est non vide, donc il existe $x_0 \in W$. D'après la question précédente, il existe donc un ouvert $U$ relatif de $X$, tel que $x_0 \in U \subset W$ et tel que, pour tout $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon$.
Alors, pour tout $x, y \in U$, par inégalité triangulaire,
$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y)\| \leq 6\varepsilon$.
Ainsi, $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et $\delta(f(U)) \leq 6\varepsilon$. On en déduit que $\omega(f, x_0) \leq 6\varepsilon$, donc $x_0 \in \Omega_{7\varepsilon}$.
On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_{7\varepsilon} \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \Omega_{7\frac{\varepsilon}{7}} \neq \emptyset$.

**26°)** Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $X$.
On fixe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
on pose $F_n = \{x \in \Omega \ / \ \forall m \geq n, \ \ \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon\}$.
On reprend et on adapte les raisonnements des questions précédentes : les questions 20 et 21 s'adaptent, donc les $F_n$ sont des fermés relatifs de $\Omega$ dont l'union est égale à $\Omega$.
D'après la question 19, $\Omega$ étant un ouvert, on peut adapter la question 22 : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de $F_N$ est vide, pour la topologie de $\Omega$. Alors il existe un ouvert non vide $W$ relatif à $\Omega$ tel que $W \subset F_N$. $\Omega$ étant ouvert relativement à $X$, $W$ est aussi un ouvert relatif de $X$.
La question 23 s'adapte mot pour mot puis la question 24 fournit un ouvert $U$ relatif à $X$, tel que $x_0 \in U \subset W$ et tel que, pour tout $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon$.
La question 25, une fois adaptée, montre alors que, $\Omega_\varepsilon \cap \Omega \neq \emptyset$.
Ainsi, $\Omega_\varepsilon$ rencontre tout ouvert non vide de $X$. Comme en fin de question 17, on en déduit que $\Omega_\varepsilon$ est dense dans $X$.

**27°)** D'après la question 12, pour tout $x \in X$,
$x \in C \iff \omega(f, x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \omega(f, x) < \frac{1}{n}$, donc $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}$.
Or d'après les questions 13 et 26, $(\Omega_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de $X$ qui sont tous denses dans $X$. Alors, d'après le lemme de Baire, valable car $X$ est supposé complet, $C$ est dense dans $X$.