

## DM 45 : un corrigé

### Partie I : Généralités

1°) Supposons que  $f$  est absolument monotone. Alors  $f = f^{(0)} \geq 0$ ,  $f' \geq 0$  et  $f'' \geq 0$ , donc d'après le cours,  $f$  est positive, croissante et convexe sur  $I$ .

2°) On suppose que  $f$  et  $g$  sont absolument monotones. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$ , donc  $f + g$  est absolument monotone.

De plus, d'après la formule de Leibniz,  $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ , donc  $(fg)^{(n)} \geq 0$ , ce qui prouve que  $fg$  est absolument monotone.

3°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(n)$  l'assertion suivante :

Pour toute application absolument monotone  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et pour toute application absolument monotone  $g : J \rightarrow I$ ,  $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$ .

◇ Supposons que  $n = 0$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow I$  deux applications absolument monotones. Alors, pour tout  $x \in J$ ,  $(f \circ g)^{(0)}(x) = f(g(x)) \geq 0$ , donc  $(f \circ g)^{(0)} \geq 0$ .

◇ Supposons que  $n \geq 0$  et que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $R(k)$  soit vraie.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow I$  deux applications absolument monotones.

$(f \circ g)' = g' \cdot (f' \circ g)$ , donc d'après la formule de Leibniz,

$$(f \circ g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f' \circ g)^{(k)} g^{(n-k+1)},$$
 or  $f'$  est une application absolument monotone

de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , donc, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on peut appliquer  $R(k)$  en remplaçant  $f$  par  $f'$ . Ainsi, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $(f' \circ g)^{(k)} \geq 0$ . Alors, la formule précédente prouve que  $(f \circ g)^{(n+1)} \geq 0$  ce qui prouve  $R(n+1)$ .

Ainsi, d'après le principe de récurrence forte, si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow I$  sont deux applications absolument monotones, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$ , ce qui prouve que  $f \circ g$  est absolument monotone.

## Partie II : exemples

4°) Sur  $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan' = 1 + \tan^2$ , donc pour tout  $n \geq 1$ ,  
 $\tan^{(n+1)} = (\tan')^{(n)} = (\tan^2)^{(n)}$ , puis d'après la formule de Leibniz,

$$\tan^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}. \text{ Ainsi, si l'on note } R(n) \text{ l'assertion } \tan^{(n)} \geq 0 \text{ sur}$$

$I$ , on a clairement  $R(0)$  et  $R(1)$  car  $\tan$  est positive sur  $I$  et car  $\tan' = 1 + \tan^2$ , puis pour tout  $n \geq 1$ , si l'on suppose que  $R(k)$  est vraie pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on montre  $R(n+1)$ . D'après le principe de récurrence forte, on en déduit que  $\tan$  est absolument monotone sur  $I$ .

5°) On vérifie aisément par récurrence que,

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in ]0, 1[, \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{1+x} \right) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \text{ et } \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in ]0, 1[, g^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \right).$$

$$\text{Si } n \text{ est impair, alors } g^{(n)}(x) = \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \right) \geq 0.$$

Supposons maintenant que  $n$  est pair et fixons  $x \in ]0, 1[$ . Alors

$$g^{(n)}(x) \geq 0 \iff \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \geq \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \iff (1-x)^{n+1} \leq (1+x)^{n+1}, \text{ or cette}$$

dernière inégalité est vraie car  $0 < 1-x \leq 1+x$ , donc  $g^{(n)} \geq 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui prouve que  $g$  est absolument monotone.

6°) D'après le cours, l'application arcsin est définie et de classe  $C^\infty$  sur  $]0, 1[$ .

$$\text{Soit } x \in ]0, 1[. \text{ On sait que } \arcsin(x) \geq 0 \text{ et que } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, si l'on pose  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , il suffit de montrer que  $f$  est absolument monotone. Or  $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ , mais par réduction au même dénominateur,

$$g(x) = \frac{x}{1-x^2}, \text{ donc } f' = gf. \text{ Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Or  $g$  est absolument monotone, donc cette formule permet de montrer par récurrence forte que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)} \geq 0$ , ce qui conclut.

### Partie III : Fonctions totalement monotones

7°) Fixons  $h \in \mathbb{R}$ . Soit  $f, g \in E$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\tau_h(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)(x + h) = \alpha f(x + h) + g(x + h) = \alpha \tau_h(f)(x) + \tau_h(g)(x), \text{ donc}$$

$$\tau_h(\alpha f + g)(x) = (\alpha \tau_h(f) + \tau_h(g))(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que  $\tau_h(\alpha f + g) = \alpha \tau_h(f) + \tau_h(g)$ , donc  $\tau_h \in L(E)$ .

De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $f \in E$ ,

$$(\tau_h \circ \tau_{-h})(f)(x) = \tau_h(\tau_{-h}(f))(x) = \tau_{-h}(f)(x + h) = f((x + h) - h) = f(x), \text{ donc}$$

$$\tau_h \circ \tau_{-h} = Id_E. \text{ En remplaçant } h \text{ par } -h, \text{ on en déduit également que } \tau_{-h} \circ \tau_h = Id_E,$$

donc  $\tau_h$  est une bijection, donc la bijection réciproque est  $\tau_{-h}$ .

Ainsi, pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_h$  est un automorphisme de l'espace vectoriel  $E$ .

8°) Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{R}$ ,  $f \in E$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

Dans l'algèbre  $L(E)$ ,  $\tau_h$  et  $-Id_E$  commutent, donc on peut appliquer la formule du

binôme de Newton. Ainsi,  $\Delta_h^n = (\tau_h - Id_E)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tau_h^k (-Id_E)^{n-k}$ , puis

$$\Delta_h^n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tau_h^k(f) \text{ et enfin, } \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh).$$

9°) Soit  $h \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{D'après la question précédente, } \Delta_h^{n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x + kh),$$

donc  $h \mapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$  est dérivable et

$$\frac{d}{dh}(\Delta_h^{n+1}(f)(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} k f'(x + kh), \text{ or d'après la formule comité-}$$

président, pour tout  $k \in \mathbb{N}_{n+1}$ ,  $k \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1}$ , donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dh}(\Delta_h^{n+1}(f)(x)) &= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n}{k-1} f'(x + kh) \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f'(x + h + kh) \\ &= (n+1) \Delta_h^n(f')(x + h), \text{ toujours d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

10°)  $\diamond$  Première méthode :

Soit  $g \in E$  une application absolument monotone. Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_h(g)$  est  $n$  fois dérivable et  $[\Delta_h g]^{(n)}(x) = g^{(n)}(x + h) - g^{(n)}(x)$ . Or  $g^{(n+1)} \geq 0$ , donc  $g^{(n)}$  est croissante, donc  $[\Delta_h g]^{(n)}(x) \geq 0$ . Ceci montre que, si  $g$  est absolument monotone, alors pour tout  $h > 0$ ,  $\Delta_h g$  est aussi absolument monotone. Alors, par une récurrence immédiate, on en déduit que si  $f$  est un élément de  $E$  absolument monotone, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , pour tout  $h > 0$ ,  $\Delta_h^n f$  est absolument monotone. En particulier,  $\Delta_h^n f \geq 0$ , ce qui montre que  $f$  est totalement monotone.

$\diamond$  Seconde méthode, moins rapide, mais davantage dans l'esprit du problème :

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Notons  $R(n)$  l'assertion suivante : pour toute application  $f \in E$  qui est absolument monotone, pour tout  $h > 0$ ,  $\Delta_h^n(f) \geq 0$ .

Pour  $n = 0$  : Soit  $f \in E$  une application absolument monotone et soit  $h > 0$ .

Alors  $\Delta_h^0(f) = f \geq 0$ , donc  $R(0)$  est vraie.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $R(n)$ . Soit  $f \in E$  une application absolument monotone.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .  $f'$  est aussi absolument monotone, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $f'$  : pour tout  $h \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $(n+1)\Delta_h^n(f')(x+h) \geq 0$ . Ainsi, d'après la question précédente, l'application  $h \mapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout  $k \in ]0, h[$ ,  $\Delta_k^{n+1}(f)(x) \leq \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ , or d'après la question 8,  $h \mapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc en faisant tendre  $k$  vers 0 dans l'inégalité précédente, on en déduit que  $\Delta_0^{n+1}(f)(x) \leq \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ , mais

$\Delta_0 = \tau_0 - Id_E = Id_E - Id_E = 0$ , donc  $\Delta_0^{n+1} = 0$ . Ainsi, on a montré que  $\Delta_h^{n+1}(f)(x) \geq 0$ , pour tout  $h > 0$  et pour tout  $f \in E$  absolument monotone. Ceci prouve  $R(n+1)$  et le principe de récurrence permet de conclure.

## Partie IV : totalement monotone $\iff$ absolument monotone

11°) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^\infty$ . Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Il s'agit de montrer

que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $R(n) : f(b) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ .

On démontre cette propriété par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 0$ ,  $\int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t) dt = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ , d'où  $R(0)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on suppose  $R(n)$ . Or en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[ -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Alors, de  $R(n)$ , on en déduit bien  $R(n+1)$ .

12°) Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Posons  $f(t) = (e^t - 1)^n$ . D'après la formule du binôme de Newton,

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kt} (-1)^{n-k}, \text{ donc pour tout } j \in \mathbb{N}, f^{(j)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^j e^{kt} (-1)^{n-k},$$

$$\text{puis } f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^j (-1)^{n-k}.$$

Or d'après la formule de Taylor-Young,  $f$  étant de classe  $C^\infty$ ,

$$\text{au voisinage de 0, } f(t) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(t^n).$$

D'autre part, au voisinage de 0, on sait que  $e^t - 1 \sim t$ , donc  $f(t) \sim t^n$ , ce qui signifie que  $f(t) = t^n + o(t^n)$ . Alors, d'après l'unicité du développement limité, on a bien que,

$$\text{pour tout } j \in \{0, \dots, n\}, \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}.$$

13°) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

D'après la formule de Taylor-Young, lorsque  $h$  tend vers  $0^+$ ,

$$\begin{aligned} 0 \leq \Delta_h^n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left( \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (kh)^j + o(h^n) \right), \end{aligned}$$

donc en intervertissant les deux sommes, puis en utilisant la question précédente,

$$0 \leq o(h^n) + \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j = f^{(n)}(x)h^n + h^n o(1). \text{ En divisant par}$$

$h^n$ , ce qui est possible car  $h > 0$ , on obtient que  $f^{(n)}(x) + o(1) \geq 0$ . On fait tendre  $h$  vers 0, et on obtient que  $f^{(n)}(x) \geq 0$ .

14°)  $\diamond$  Pour tout  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \Delta_h^2(f)(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$ , donc  $f(x+h) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(x+2h))$ .

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$ , posons  $h = \frac{b-a}{2}$ . Alors  $f(a+h) = f(\frac{1}{2}(a+b))$  et

$$f(a+2h) = f(b), \text{ donc (1) : } f(\frac{1}{2}(a+b)) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

Si  $a > b$ , on applique ce qui précède en remplaçant  $(a, b)$  par  $(b, a)$ . On retrouve (1).

Si  $a = b$ , (1) est évidente, donc (1) est vraie pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$\diamond$  Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrons par récurrence sur  $n$  l'assertion  $R(n)$  suivante :

$$\text{pour tout } k \in \{0, \dots, 2^n\}, f(x + \frac{k}{2^n}(y-x)) \leq f(x) + \frac{k}{2^n}(f(y) - f(x)).$$

Pour  $n = 0$ , c'est évident.

Pour  $n \geq 0$ , supposons  $R(n)$ .

Soit  $k \in \{0, \dots, 2^{n+1}\}$ .

Si  $k$  est pair,  $k = 2h$ , donc d'après  $R(n)$ ,

$$\begin{aligned} f(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &= f(x + \frac{h}{2^n}(y-x)) \leq f(x) + \frac{h}{2^n}(f(y) - f(x)) \\ &= f(x) + \frac{k}{2^{n+1}}(f(y) - f(x)). \end{aligned}$$

Si  $k$  est impair,  $k = 2h + 1$ , donc

$$\begin{aligned} f(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &= f(x + \frac{h}{2^n}(y-x) + \frac{1}{2^{n+1}}(y-x)) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\left[\left(x + \frac{h}{2^n}(y-x)\right) + \left(x + \frac{h+1}{2^n}(y-x)\right)\right]\right), \end{aligned}$$

donc d'après l'énoncé, puis en utilisant  $R(n)$ ,

$$\begin{aligned} f(x + \frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(x + \frac{h}{2^n}(y-x)\right) + f\left(x + \frac{h+1}{2^n}(y-x)\right)\right] \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\left(f(x) + \frac{h}{2^n}(f(y) - f(x))\right) + \left(f(x) + \frac{h+1}{2^n}(f(y) - f(x))\right)\right] \\ &= f(x) + \frac{2h+1}{2^{n+1}}(f(y) - f(x)), \end{aligned}$$

ce qui prouve  $R(n+1)$ .

$\diamond$  Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $k_n$  la partie entière de  $2^n \alpha$ .

Ainsi,  $k_n \in \{0, \dots, 2^n\}$ . De plus,  $2^n\alpha - 1 \leq k_n \leq 2^n\alpha$ , donc d'après le principe des gendarmes,  $\frac{k_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(x + \frac{k_n}{2^n}(y - x)) \leq f(x) + \frac{k_n}{2^n}(f(y) - f(x))$  et  $f$  est continue, donc en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient :  $f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x))$ . Ceci montre que  $f$  est convexe.

**15°)** D'après la question précédente, il suffit de montrer que  $f$  est continue.

◇ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ ,  $0 \leq \Delta_h(f)(x) = f(x + h) - f(x)$ , donc  $f$  est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède en tout  $x \in \mathbb{R}$  une limite à droite, notée  $f(x)^+$  et une limite à gauche notée  $f(x)^-$ , avec  $f(x)^- \leq f(x) \leq f(x)^+$ .

◇ Pour tout  $h > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \Delta_h^2(f)(x)$ , donc d'après le début de la question précédente, qui n'utilise pas l'hypothèse de continuité,

pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f(\frac{1}{2}(a + b)) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On en déduit que, pour tout  $h > 0$ ,  $f(x + h) \leq \frac{1}{2}(f(x - h) + f(x + 3h))$ , donc en faisant tendre  $h$  vers  $0^+$ ,  $f(x)^+ \leq \frac{1}{2}(f(x)^- + f(x)^+)$ , donc  $f(x)^+ \leq f(x)^-$ .

Ainsi,  $f(x)^+ = f(x) = f(x)^-$ , ce qui prouve que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## Partie V : Développement en série entière

**16°)** ◇ On ne peut en général pas prolonger  $f$  en  $b$  en une application monotone, car la fonction  $\tan$  est absolument monotone sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$  d'après la question 4, mais elle n'est pas prolongeable par continuité en  $\frac{\pi}{2}$ , car  $\tan(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} +\infty$ .

◇  $f$  est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone,

$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \inf_{x \in ]a, b[} f(x)$ . Or  $f$  est positive, donc  $\{f(x) / x \in ]a, b[ \}$  est une partie non vide

minorée de  $\mathbb{R}$ . Ainsi, il existe  $\ell \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \ell$ . Alors, en posant  $f(a) = \ell$ , on prolonge  $f$  en une application continue et positive sur  $[a, b[$ .

◇ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $f^{(n)}$  est croissante et positive, donc le même raisonnement que précédemment prouve qu'il existe  $\ell_n \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f^{(n)}(x) \xrightarrow[t \rightarrow a]{} \ell_n$ . Or

$f$  est continue sur  $[a, b[$  et  $C^\infty$  sur  $]a, b[$ , donc d'après le théorème de la limite de la dérivée,  $f$  est  $C^\infty$  sur  $[a, b[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(a) = \ell_n \geq 0$ , ce qui prouve que  $f$  est absolument monotone sur  $[a, b[$ .

**17°)** Soit  $t \in [0, b[$ . Avec les notations de l'énoncé, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \rho_n(t)$ , or  $f$  est absolument monotone, donc  $\rho_n(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \geq 0$ , donc  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \leq f(t)$ . Ainsi, la suite des sommes partielles de la série  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$  est majorée, or cette série est à termes positifs, donc d'après le cours, elle est convergente.

**18°)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $\frac{\rho_n(t)}{t^n} = \int_0^t \frac{(1-\frac{x}{t})^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$ , or pour tout  $x \in [0, t]$ ,  $\frac{x}{t} \geq \frac{x}{t'}$ , donc  $0 \leq 1 - \frac{x}{t} \leq 1 - \frac{x}{t'}$ . Ainsi,  $\frac{\rho_n(t)}{t^n} \leq \int_0^t \frac{(1-\frac{x}{t'})^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx \leq \int_0^{t'} \frac{(1-\frac{x}{t'})^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$ , car la fonction intégrée est positive. Ceci conclut.

**19°)** Soit  $t \in [0, b[$ . Il suffit de montrer que  $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ . C'est évident lorsque  $t = 0$ , donc on peut supposer que  $0 < t < b$ . Alors il existe  $t' \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < t < t' < b$ . D'après la question précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \rho_n(t) \leq \left(\frac{t}{t'}\right)^n \rho_n(t')$ , or  $\rho_n(t') = f(t') - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t'^k \leq f(t')$ , car  $f$  est absolument monotone, donc  $0 \leq \rho_n(t) \leq \left(\frac{t}{t'}\right)^n f(t') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , car  $\frac{t}{t'} \in [0, 1[$ . On en déduit alors que  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = f(t) - \rho_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$ , ce qu'il fallait démontrer.

**20°)** Toujours d'après la formule de Taylor avec reste intégral, il suffit de montrer que, pour tout  $t \in ]-b, b[$ ,  $\rho_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . C'est déjà fait lorsque  $t \in [0, b[$ .

Supposons maintenant que  $-b < t < 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par inégalité triangulaire,

$$|\rho_n(t)| \leq \int_t^0 \frac{|t-x|^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx, \text{ car } f^{(n+1)}(x) \geq 0. \text{ On pose } u = -x :$$

$$|\rho_n(t)| \leq \int_0^{-t} \frac{|u - (-t)|^n}{n!} f^{(n+1)}(-u) du. \text{ Or } f^{(n+1)} \text{ est croissante,}$$

donc pour tout  $u \in [0, -t]$ ,  $f^{(n+1)}(-u) \leq f^{(n+1)}(u)$ . Ainsi,

$$|\rho_n(t)| \leq \int_0^{-t} \frac{|u - (-t)|^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = \int_0^{-t} \frac{((-t) - u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = \rho_n(-t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'après la question précédente. Ceci conclut cette question.