

Résumé de cours :
Semaine 24, du 23 au 27 mars.

Équations différentielles

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 (fin)

Principe de superposition des solutions : On suppose que $b = b_1 + b_2$, où b_1 et b_2 sont deux applications continues de I dans \mathbb{K} . Notons (E_1) et (E_2) les équations différentielles suivantes : $(E_1) : y' = a(t)y + b_1(t)$ et $(E_2) : y' = a(t)y + b_2(t)$.

Supposons que z_1 est une solution de (E_1) et que z_2 est une solution de (E_2) .

Alors $z_1 + z_2$ est une solution de (E) .

Définition. On suppose que c est une troisième application continue de I dans \mathbb{K} . On note (F) l'équation différentielle $c(t)y' = a(t)y + b(t)$.

(F) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 **non résolue**, alors que (E) est appelée une équation différentielle linéaire d'ordre 1 résolue.

Soit $t_0 \in I$. On suppose que t_0 est l'unique "zéro" de c sur I .

Notons $I_g = I \cap]-\infty, t_0[$ et $I_d = I \cap]t_0, +\infty[$.

Sur I_g et sur I_d , $(F) \iff y' = \frac{a(t)}{c(t)}y + \frac{b(t)}{c(t)}$, ce qui nous ramène à une équation résolue.

Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d . On dit que y_g et y_d se raccordent en t_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d .

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente. y_g et y_d se raccordent en t_0 en une solution de (F) définie et de classe C^1 sur I en entier si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell$ et $y_d(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{} \ell$;
- (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y'_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell'$ et $y'_d(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{} \ell'$.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

2.1 Équations à coefficients quelconques

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$

où a, b, c sont trois applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

L'équation homogène associée est $(H) : y'' = a(x)y' + b(x)y$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E) . Si y_0 est une solution de (E) , alors $S_E = \{y_0 + y/y \in S_H\} \triangleq y_0 + S_H$.

Définition. Soit $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. On appelle problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0) le problème de la recherche des solutions de (E) telles que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Pour tout $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y'_0) .

Propriété. S_H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de \mathbb{K}^I .

Cas particulier où on connaît une solution φ_1 de (H) ne s'annulant pas sur I : on pose $y(x) = \lambda(x)\varphi_1(x)$. Alors (E) est équivalente à une équation linéaire d'ordre 1 en λ' .

Il faut savoir le démontrer.

Définition. On suppose que d est une quatrième application continue de I dans \mathbb{K} . On note (F) l'équation différentielle $d(x)y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$.

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. On suppose que x_0 est l'unique "zéro" de d sur I .

Notons $I_g = I \cap]-\infty, x_0[$ et $I_d = I \cap]x_0, +\infty[$.

Sur I_g et sur I_d , $(F) \iff y'' = \frac{a(x)}{d(x)}y'(x) + \frac{b(x)}{d(x)}y(x) + \frac{c(x)}{d(x)}$, ce qui nous ramène à une équation différentielle résolue linéaire d'ordre 2.

Supposons que y_g est une solution de (F) sur I_g et que y_d est une solution de (F) sur I_d . On dit que y_g et y_d se raccordent en x_0 en une solution y sur I si et seulement si y est une solution de (F) sur I dont les restrictions sur I_g et I_d sont y_g et y_d .

Propriété. Reprenons les notations de la définition précédente. y_g et y_d se raccordent en x_0 en une solution définie et de classe C^2 sur I en entier si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1) : Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que $y_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell$ et $y_d(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{} \ell$;
- (2) : Il existe $\ell' \in \mathbb{K}$ tel que $y'_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell'$ et $y'_d(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{} \ell'$;
- (3) : Il existe $\ell'' \in \mathbb{K}$ tel que $y''_g(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^-]{} \ell''$ et $y''_d(t) \xrightarrow[t \rightarrow t_0^+]{} \ell''$.

2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$, où $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes.

L'équation homogène associée est $(H) : y'' + ay' + by = 0$.

2.2.1 Résolution de (H) : Il faut savoir le démontrer.

$\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E) .

- *Premier cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$ ou bien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$.

Dans ce cas, χ admet deux racines distinctes dans \mathbb{K} , notées λ et μ .

Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\mu x}$.

- *Second cas.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$. Alors $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha - i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et

$(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = ue^{\alpha x} \cos \beta x + ve^{\alpha x} \sin \beta x$.

- *Troisième cas.* Si $\Delta = 0$: χ admet une racine double notée λ .

Alors $(H) \iff \exists(u, v) \in \mathbb{K}^2 \forall x \in \mathbb{R} \ y(x) = e^{\lambda x}(u + xv)$.

2.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$\forall x \in I \ f(x) = e^{\lambda x}P(x)$. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.

Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \mapsto x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P , avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ , avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ .

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme

$(E) : y' + by = e^{\lambda x} P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X] : (E)$ admet sur I une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.

Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto x^m e^{\lambda x} Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P , avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Remarque. Lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x) \cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$, ou bien de la forme $f(x) = P(x) \sin(\omega x)$, on peut appliquer ce qui précède en se ramenant à $x \mapsto P(x)e^{i\omega x}$.

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x)e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x)e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

3 Compléments hors programme

3.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Notation. On suppose que f est une application à valeurs dans \mathbb{K} , définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$. On note (E) l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. C'est la forme générale d'une équation différentielle résolue d'ordre 1.

y est une solution de (E) si et seulement si y est une application à valeurs dans \mathbb{K} , définie sur un intervalle I de cardinal infini inclus dans \mathbb{R} , telle que, pour tout $t \in I$, $(t, y(t)) \in U$ et $y'(t) = f(t, y(t))$. À noter que l'intervalle I est lui-même une inconnue de (E) .

Définition. Soit y une solution de (E) définie sur un intervalle I . On dit qu'elle est maximale si et seulement si il n'existe pas de prolongement strict de y en une solution de (E) .

Définition. Soit $(t_0, y_0) \in U$. On appelle "problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0, y_0) " la recherche des solutions y de (E) telles que $y(t_0) = y_0$.

Théorème. On suppose que f est continue sur U et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie et continue sur U .

Alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy relatif à (E) et à (t_0, y_0) . Cette solution est définie sur un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Toute autre solution du même problème de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.

3.2 Equations à variables séparées

Notation.

Soient I et K deux intervalles infinis et soient $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : K \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. L'équation différentielle $(E) : a(t) - b(y)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparées.

Si A et B sont des primitives de a et de b respectivement,

$(E) \iff \frac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0$, donc les courbes intégrales de (E) ont pour équations cartésiennes

$A(x) = B(y) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.

En pratique, on écrira $(E) \iff a(t)dt = b(y)dy \iff A(t) = B(y) + C$.

3.3 Equations à variables séparables

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis. Soient a et d deux applications continues de I dans \mathbb{R} et b et c deux applications continues de K dans \mathbb{R} . L'équation $(E) : a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparables.

En divisant par $c(y)$ et $d(t)$ on se ramène à une équation à variables séparées.

- Plus précisément, soit $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Quitte à restreindre l'intervalle I , on supposera que d ne s'annule pas sur I . Ainsi $(E) \iff \frac{a(t)}{d(t)}c(y) - y'b(y) = 0$.

Il faudra ensuite étudier les possibles raccordements des solutions en chaque zéro de d .

- Si $y_0 \in K$ est un zéro de c , l'application constante $y = y_0$ est une solution de (E) . Ainsi chaque zéro de c fournit une solution particulière.

On suppose ensuite que $\forall t \in I \ c(y(t)) \neq 0$. Alors $(E) \iff \frac{a(t)}{d(t)} - y' \frac{b(y)}{c(y)} = 0$: c'est une équation à variables séparées, donc on est ramené au a). Il reste ensuite à étudier les possibles recollements de ces dernières solutions avec les solutions particulières $y = y_0$ où y_0 est un zéro de c .

Les polynômes (début)

4 Le groupe des polynômes

Notation. A désigne un anneau quelconque.

Définition. On note $A[X] \triangleq A^{(\mathbb{N})}$: c'est l'ensemble des suites presque nulles.

Si $P = (a_k) \in A[X]$, on convient de noter $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$.

Remarque. Par définition, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Propriété. Si $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$, alors $P + Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k + b_k) X^k$.

$(A[X], +)$ est un sous-groupe commutatif de $A^{\mathbb{N}}$ dont le neutre est le polynôme identiquement nul.

Définition. Si $P(X) = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A[X] \setminus \{0\}$, $\deg(P) = \max(\{k \in \mathbb{N} / a_k \neq 0\})$.

On convient que $\deg(0) = -\infty$.

Définition. Soit $P(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in A[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.

- a_k est le coefficient de P de degré k .
- a_0 est aussi appelé le coefficient constant du polynôme P .
- a_n est appelé le coefficient de plus haut degré de P , ou bien son coefficient dominant.
- On dit que P est unitaire (ou normalisé) si et seulement si $a_n = 1$.
- Le polynôme $a_k X^k$ est appelé un monôme.

Notation. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n[X] = \{P \in A[X] / \deg(P) \leq n\}$. Ainsi, $A[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n[X]$.

Propriété. $\deg(P + Q) \leq \sup(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité lorsque $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

5 Produits de polynômes

Définition. $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n\right) \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) \triangleq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) X^n$.

Propriété. Pour tout $P, Q \in A[X]$, PQ est aussi un élément de $A[X]$.

Propriété. $(A[X], +, \times)$ est un anneau, avec $1_{A[X]} = (\delta_{k,0} 1_A)_{k \in \mathbb{N}}$.

Remarque. $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n\right) \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n\right) \times \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 \\ i+j+k=n}} a_i b_j c_k\right) X^n$.

Propriété. L'application $i : A \rightarrow A[X]$
 $a \mapsto (a\delta_{0,k})_{k \in \mathbb{N}}$ est un morphisme injectif d'anneaux. On identifie A avec une partie de $A[X]$ en convenant que, pour tout $a \in A$, $a = i(a)$. Alors $A_0[X] = A$.

Remarque. Lorsque $b \in A$ et $P \in A[X]$, on dispose donc du produit bP .

Si $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$, on vérifie que $bP = \sum_{k \in \mathbb{N}} ba_k X^k$.

Propriété. $A[X]$ est commutatif intègre si et seulement si A est commutatif intègre.

Il faut savoir le démontrer.

Pour toute la suite de ce chapitre, on supposera que A est commutatif intègre.

Propriété. Pour tout $P, Q \in A[X]$, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $U(A[X]) = U(A)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. L'indéterminée X est le polynôme $(1_A \delta_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}$. On a $X^n = (1_A \delta_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$.

6 Polynômes à plusieurs indéterminées (hors programme)

A est commutatif intègre, donc $A[X]$ est commutatif intègre, puis $(A[X])[Y]$ est aussi un anneau commutatif intègre. Ce dernier ensemble est l'anneau des polynômes à deux indéterminées à coefficients dans A . On le note plutôt $A[X, Y]$.

Il est isomorphe à $A^{(\mathbb{N}^2)}$, en convenant que $(a_{h,k})_{(h,k) \in \mathbb{N}^2} = \sum_{\substack{0 \leq h \leq m \\ 0 \leq k \leq n}} a_{h,k} X^h Y^k$.

Dans ces conditions, $X = (\delta_{h,1} \delta_{k,0})_{(h,k) \in \mathbb{N}^2}$ et $Y = (\delta_{h,0} \delta_{k,1})_{(h,k) \in \mathbb{N}^2}$.

On peut vérifier que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}^2$, $X^p Y^q = (\delta_{h,p} \delta_{k,q})_{(h,k) \in \mathbb{N}^2}$.

En généralisant, on peut définir $A[X_1, \dots, X_p]$, l'anneau des polynômes à p indéterminées.

7 Applications polynomiales

Définition. Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in A[X]$ un polynôme. L'application polynomiale associée à P est

l'application $\tilde{P} : A \rightarrow A$
 $x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k$.

Propriété. L'application $\varphi : A[X] \rightarrow \mathcal{F}(A, A)$
 $P \mapsto \tilde{P}$ est un morphisme d'anneaux.

Notation. $Im(\varphi)$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(A, A)$. C'est l'anneau des applications polynomiales.

Théorème. Lorsque A est un corps, φ est injectif si et seulement si A est de cardinal infini.

Algorithme d'Hörner : Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in A[X]$ et $x \in A$. On peut disposer le calcul de $\tilde{P}(x)$ de

la manière suivante : $\tilde{P}(x) = (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2}x) + \dots + a_1)x + a_0$. Cet algorithme permet de calculer $\tilde{P}(x)$ avec n multiplications et n additions.