

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 21 : du lundi 30 mars au vendredi 03 avril.

**Liste des questions de cours**

- 1°) Montrer que la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation sans second membre.
- 2°) Quelles sont les solutions de l'équation  $(H) : y' = a(t)y$ ? Justifiez.
- 3°) Présenter la méthode de variation de la constante.
- 4°) Résoudre  $(E) : y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}}$ .
- 5°) Résolution de  $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$  lorsque l'on dispose d'une solution particulière de l'équation sans second membre qui ne s'annule pas.
- 6°) Etablir les formules donnant les solutions de  $(H) : y'' + ay' + by = 0$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes.
- 7°) Résoudre  $(E) : y'' - 2y' + y = \operatorname{cht}$ .
- 8°) Résoudre  $(E) : y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \cos t$ .

**Thèmes de la semaine**

- 1 En révisions :**  
**le programme précédent sur la dérivation et la convexité**
- 2 Équations différentielles linéaires**

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1**

On s'intéresse aux équations différentielles  $(E) : y' = a(t)y + b(t)$  et  $(H) : y' = a(t)y$  en l'inconnue  $y$ , où  $I$  est un intervalle, et où  $a$  et  $b$  sont deux applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

$(H)$  est l'équation homogène (ou bien l'équation sans second membre, ESSM) associée à  $(E)$ .

Problème de Cauchy relatif à  $(E)$  et à une condition initiale de la forme  $y(t_0) = y_0$ .

La solution générale de  $(E)$  s'obtient en ajoutant une solution particulière de  $(E)$  à la solution générale de  $(H)$ .

Principe de superposition des solutions.

Solutions de l'équation  $(H)$ .

Méthode de variation de la constante.

Existence et unicité au problème de Cauchy.

Pour une équation non résolue de la forme  $c(t)y' = a(t)y + b(t)$ , lorsque  $c$  possède un unique zéro  $t_0$ , raccordement d'une solution à droite de  $t_0$  avec une solution à gauche de  $t_0$ .

## 2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

### 2.2.1 Équations à coefficients quelconques

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est de la forme  $(E) : y'' = a(x)y' + b(x)y + c(x)$  où  $a, b, c$  sont trois applications continues d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

L'équation homogène associée est  $(H) : y'' = a(x)y' + b(x)y$ .

$$S_E = \{y_0 + y/y \in S_H\} = y_0 + S_H.$$

Principe de superposition des solutions.

Problème de Cauchy relatif à  $(E)$  et à des conditions initiales de la forme  $y(x_0) = y_0$  et  $y'(x_0) = y'_0$ .

**Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Pour tout  $(x_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ , il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à  $(E)$  et au triplet  $(x_0, y_0, y'_0)$ .

Résolution de  $(E)$  lorsque l'on dispose d'une solution particulière de  $(H)$  qui ne s'annule pas.

Exemples de raccordements de solutions.

### 2.2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici,  $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$ , où  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  est continue, et où  $a$  et  $b$  sont des constantes. L'équation homogène associée est  $(H) : y'' + ay' + by = 0$ .

Solutions de  $(H)$  en fonction des racines du polynôme caractéristique  $\chi = X^2 + aX + b$ .

Solution particulière de  $(E)$ , lorsque  $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$ , où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et où  $P$  est un polynôme.

## 2.3 Equations à variables séparables (hors programme)

Théorème de Cauchy-Lipschitz (admis) pour une équation différentielle de la forme  $y' = f(t, y)$ , où  $f$  est une application d'un ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}$ , continue et telle que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est continue sur  $U$ .

Équation à variables séparées :

$$a(t) - b(y)y' = 0 \iff \frac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des primitives de } a \text{ et de } b.$$

Équation à variables séparables :

$$a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0 \iff \frac{a(t)}{d(t)} - y' \frac{b(y)}{c(y)} = 0, \text{ mais il faut gérer les problèmes de "division par 0".}$$

## Prévisions pour la semaine prochaine :

Révisions d'analyse.